

उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ (Maximima Minima)

Mathematics is science of what is clear by itself.....gacobi, Carl

परिभाषा (Definition)

यह पाठ मूलतः चार शब्दों "परम उच्चतम" "स्थानीय उच्चिष्ठ" "परम निम्नतम" एवं "स्थानीय निम्निष्ठ" पर निर्भर करती है।

पर उच्चतम (Global Maximim)

एक फलन $f(x)$ में एक परम उच्चतम होता है यदि कम से कम एक $c \in E$ इस प्रकार है कि $f(x) \leq f(c) \forall x \in E$. अतः हम कह सकते हैं कि परम उच्चिष्ठ $x=c$ पर मिलता है तथा इसका मान $f(c)$ है।

स्थानीय उच्चिष्ठ (Local axima)

एक फलन $f(x)$ एक स्थानीय उच्चतम होता है यदि $x=c$ पर $f(c)$ फलन का c के अंतराल $(c-h, c+h), h > 0$ में अधिकतम मान है।

अर्थात् सभी $x \in (c-h, c+h)$, के लिये $x \neq c$, हम कह सकते हैं कि $f(x) < f(c)$

अर्थात् $f(c-\delta) < f(c) < f(c+\delta), 0 < \delta < h$

छवजमः यदि $x=c$ सीमांत बिन्दु है तो $(c-h, c)$ या $(c, c+h), (h > 0)$ उपयुक्त है।

परम निम्नतम (Global Minimim):

एक फलन $f(x)$ में एक परम निम्नतम होता है यदि कम से कम एक $c \in E$ प्रकार है कि $f(x) \geq f(c) \forall x \in E$.

स्थानीय निम्निष्ठ (Local Minima)

एक फलन $f(x)$ में $x=c$ पर स्थानीय निम्नतम होता है यदि c के सामिप्य $(c-h, c+h), h > 0$ में फलन न्यूनतम मान $f(c)$

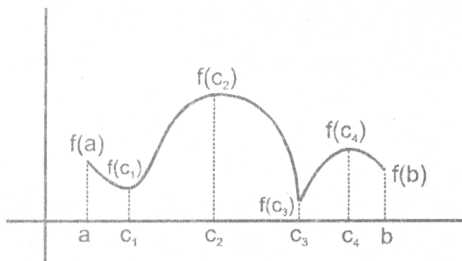
अर्थात् सभी $x \in (c-h, c+h), x \neq c$, के लिय हम कह सकते हैं कि $f(x) > f(c)$

अर्थात् $f(c-\delta) > f(c) < f(c+\delta), 0 < \delta < h$

चरम (Extrema):

एक उच्चिष्ठ या एक निम्निष्ठ को चरम कहा जाता है।

मना $y=f(x)$ का ग्राफ $x \in [a, b]$



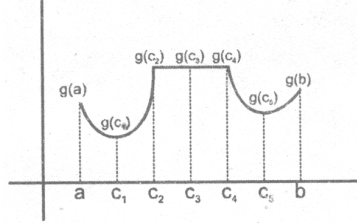
$x=a, x=c_2, x=c_4$ स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु है जबकि अधिकतम मान क्रमशः $f(a), f(c_2), f(c_4)$ है।

$x=c_1, x=c_3, x=b$ स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु है जबकि निम्नतम मान क्रमशः $f(c_1), f(c_3), f(b)$ है।

$x = c_2$ परम उच्चिष्ठ बिन्दु है।

$x = c_3$ परम निम्निष्ठ बिन्दु है।

माना $y = g(x), x \in [a, b]$ का आलेख निम्न है—



$x = c_1, x = c_5$ स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु है जबकि न्यूनतम मान क्रमशः $g(c_1), g(c_5)$ है।

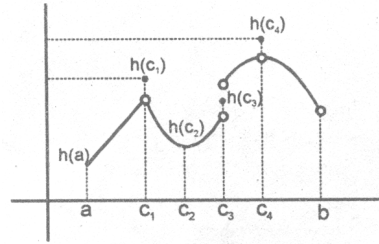
$x = a, x = b$ स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु है जबकि उच्चिष्ठ मान क्रमशः $g(a), g(b)$ है।

$x = c_2, x = c_3, x = c_4$ ना तो स्थानीय निम्निष्ठ है ना ही स्थानीय उच्चिष्ठ है।

परम न्यूनतम $x = c_1$ पर परम न्यूनतम मान $g(c_1)$ है।

पर उच्चतम $x \in h(x), x \in [c_2, c_4]$ में पर उच्चतम $g(c_2) = g(c_3) = g(c_4)$ है।

माना $y = h(x), x \in [a, b]$ का आलेख निम्न है—



$x = c_1, x = c_4$ स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु है जबकि अधिकतम मान क्रमशः $h(c_1), h(c_4)$ है।

$x = a, x = c_2$ स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु है जबकि न्यूनतम मान क्रमशः $h(a), h(c_2)$

$x = c_3$ ना तो उच्चिष्ठ बिन्दु है और न ही निम्निष्ठ बिन्दु है।

पर उच्चिष्ठ $h(c_4)$ है।

पर निम्निष्ठ $h(a)$ है।

अवकलनीय फन के लिए उच्चिष्ठ (Maxima Minima for differentiable functions):

उच्चिष्ठ, निम्निष्ठ की परिभाषा प्रश्नो को हल करते समय कठिन हो जाती है।

चरम बिन्दु के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध ;। necessary condition for an entrema):

माना $f(x), x = c$ पर अवकनीय है।

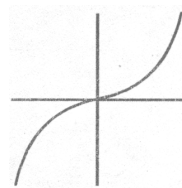
प्रमेण (Theorem): $f(x)$ का चरम बिन्दु होने के लिये आवश्यक प्रतिबन्ध है कि $f'(c) = 0$ अर्थात् $f(c)$ चरम है $\Rightarrow f'(c) = 0$

नोट: $f'(c) = 0$ केवल आवश्यक प्रतिबन्ध है लेकिन पर्याप्त नहीं है।

अर्थात् $f'(c) = 0 \Rightarrow f(c)$ चरम है।

माना $f(x) = x^3$

$f'(0) = 0$



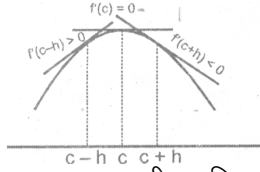
लेकिन $f(0)$ चरम बिन्दु नहीं है।

चरम बिन्दु के पर्याप्त प्रतिबन्ध (Sufficient condition for an extreme):

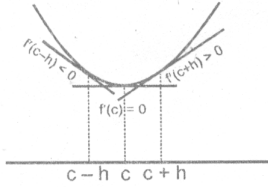
माना $f(x)$ अवकलनीय फलन है।

प्रमेय (Theorem): $f(x)$ का चरम बिन्दु $f(c)$ होने के लिये पर्याप्त प्रतिबन्ध है कि $f'(x)$ का चिन्ह $f(x)$ द्वारा c को पार करने पर परिवर्तित होता है।

अर्थात् $f(c)$ एक चरम बिन्दु है \Leftrightarrow यदि और केवल यदि x द्वारा c को पार करने पर $f'(x)$ का चिन्ह परिवर्तित हो।



$x = c$ का स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु है। $f'(x)$ का चिन्ह धनात्मक से ऋणात्मक से परिवर्तित होता है



$x = c$ एक स्थानीय निम्निष्ठ है $f'(x)$ का चिन्ह ऋणात्मक से धनात्मक होता है।

स्थिर बिन्दु (Stationary points):

फलन $f(x)$ के आलेख पर वो बिंदु जहां $f'(x)=0$ हो तो स्थिर बिन्दु कहलाते हैं।

स्थिर बिन्दु पर $f(x)$ के परिवर्तन की दर शून्य होती है।

प्रथम अवकलज परीक्षण (First Derivative Test):

माना $f(x)$ एक सत् और अवकनीय फलन है।

चरण –I. $f'(x)$ ज्ञात कीजिए।

चरण –II. $f'(x)=0$ को हल कीजिए। माना $x=c$ एक हल है (अर्थात् स्थित बिन्दु ज्ञात कीजिए)

चरण –III. चिह्न परिवर्तन का प्रेक्षण कीजिए।

- (i) यदि $f'(x)$ का चिह्न $x=c$ पर बायीं ओर जानं पर ऋणात्मक से धनात्मक होता है तब $x=c$ स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु है।
- (ii) यदि $f'(x)$ का चिह्न $x=c$ पर बायीं ओर से दायीं ओर जाने पर धनात्मक से ऋणात्मक होता है तब $x=c$ स्थायी उच्चिष्ठ बिन्दु है।
- (iii) यदि $x=c$ का पार करने पर $f'(x)$ का चिह्न परिवर्तित नहीं होता है तब $x=c$ न तो उच्चिष्ठ बिन्दु है और न ही निम्निष्ठ बिन्दु है।

उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ सत् फलनों के लिए (Maxima Minima for continuous functions):

माना $f(x)$ सत् फलन है।

क्रांतिक बिन्दु (Critical points):

वह बिन्दु जहां $f'(x)=0$ या $f(x)$ अवकलनीय नहीं हो, क्रांतिक बिन्दु कहलाते हैं।

स्थिर बिन्दु \subseteq क्रांतिक बिन्दु

महत्वपूर्ण नोट (Important Note)

$f(x)$ के R में परिभाषित होने के लिए चरम बिन्दु केवल क्रांतिक बिन्दु पर प्राप्त होते हैं।

नोट : क्रांतिक बिन्दु हमेशा अन्तराल के आन्तरिक बिन्दु होते हैं।

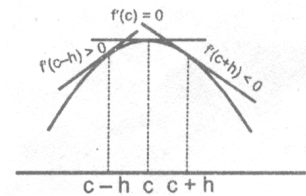
सतत फलनों के लिए परम उच्चिष्ठ (Global extrema for continuous functions):

- (i) फलन बंद अंतराल के लिए परिभाषित है।
 माना $f(x), x \in [a, b]$ सत् फलन है।
 चरण – I: क्रांतिक बिन्दु ज्ञात कीजिए। माना कि यह c_1, c_2, \dots, c_n है
 चरण – II: $f(a), f(c_1), \dots, f(c_n), f(b)$ ज्ञात कीजिए।
 माना $M = \max. \{f(a), f(c_1), \dots, f(c_n), f(b)\}$
 $m = \min. \{f(a), f(c_1), \dots, f(c_n), f(b)\}$
 चरण – III M परम उच्चिष्ठ है।
 m पर निम्निष्ठ है।
- (ii) फलन खुले अंतराल पर परिभाषित होता है।
 माना $f(x), x \in (a, b)$ सत् फलन है।
 चरण – I क्रांतिक बिन्दु ज्ञात कीजिए। माना यह c_1, c_2, \dots, c_n है।
 चरण – II $f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_n)$ ज्ञात कीजिए
 माना $M = \max. \{f(c_1), \dots, f(c_n)\}$
 $m = \min. \{f(c_1), \dots, f(c_n)\}$
- चरण – III $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l_1$ (माना) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l_2$ (माना)
 माना $l = \min. \{l_1, l_2\}, L = \max. \{l_1, l_2\}$
- चरण – IV
 (i) यदि $m \leq l$ तब m निम्निष्ठ है।
 (ii) यदि $m > l$ तब $f(x)$ में परम निम्निष्ठ नहीं है।
 (iii) यदि $m \geq l$ तब M पर उच्चिष्ठ है।
 (iv) यदि $m < l$ तब $f(x)$ में परम उच्चिष्ठ नहीं है।

उच्च क्रम के अवकलजों द्वारा उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ ज्ञात करना (Maxima Minima by higher order derivatives):

द्वितीय अवकलज परीक्षण (Second derivative test):

- माना $f(x)$ का द्वितीय उच्च क्रम तक अवकलज है।
 चरण – I $f'(x)$ ज्ञात कीजिए
 चरण – II. $f'(x)=0$ को हल कीजिए। माना $x=c$ एक हल है।
 चरण – III $f''(c)$ ज्ञात कीजिए।
 चरण – IV
 (i) यदि $f'(x)=0$ तब आगे परीक्षण की आवश्यकता है।
 (ii) यदि $f''(x)>0$ तब $x=c$ निम्निष्ठ बिन्दु है।



उच्चिष्ठ के लिए $f'(x)$ धनात्मक से ऋणात्मक होता है।
 $\Rightarrow f'(x)$ हासमान फलन है अतः $f'(c)<0$

nवां अवकलज परीक्षण (n^{th} Derivative test):

माना $f(x)$ के n के क्रम तक अवकलज का अस्तित्व है।
 यदि $f'(c)=f''(c)=\dots=f^{(n-1)}(c)=0$ और

$f^n(x)$ तब निम्नलिखित सम्भवनाएँ हैं—

- (i) n सम है $f^n(c) < 0 \Rightarrow x = c$ उच्चिष्ट बिन्दु है।
- (ii) n सम है $f^n(c) > 0 \Rightarrow x = c$ निम्निष्ठ बिन्दु है।
- (iii) n विषम है $f^n(c) < 0 \Rightarrow f(x), x = c$ के परितः हासमान है।
- (iv) n विषम है $f^n(c) > 0 \Rightarrow f(x), x = c$ के परितः वर्धमान है।

उच्चिष्ट एवं निम्निष्ठ के अनुप्रयोग (Application of maxima/Minima to Problems)

किसी दिये गए प्रश्न को हल करने के लिए एक उद्देशीय फलन को केवल प्राचल के रूप में बनाया जा सकता है और चरम मान अवकलज को शून्य करके प्राप्त किया जा सकता है। जैसा कि भाग क्रांतिक बिन्दु में दिया गया है, उच्चिष्ट एवं निम्निष्ठ ज्ञात किया जा सकता है।

क्षेत्रमिति के उपयोग सूत्र (Useful Formula of Measurement to Remember)

1. घनाभ का आयतन = ℓbh .
2. घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(\ell b + bh + h\ell)$
3. घन का आयतन = a^3
4. घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$
5. शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.
6. शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r \ell$ (ℓ = तिर्यक ऊँचाई)
7. बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r h$.
8. बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r h + 2\pi r^2$
9. गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$
10. गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $4\pi r^2$
11. वृत्तीय परिच्छेद का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}r^2\theta$ जब कि θ रेडियन में है।
12. प्रिज्म का आयतन = (आधार का क्षेत्रफल) \times (ऊँचाई)
13. प्रिज्म की पार्श्व सतह (lateral surface) (आधार की परिमिति) \times (ऊँचाई)
14. प्रिज्म का कुल क्षेत्रफल (पार्श्व सतह) + 2 (आधार का क्षेत्रफल) (ध्यान रहें कि प्रिज्म की सभी पार्श्व सतहें आयताकार होती हैं।)
15. पिरामिड का आयतन = $\frac{1}{3}$ (आधार का क्षेत्रफल) \times (ऊँचाई)
16. पिरामिड का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (आधार की परिमिति) \times (तिर्यक ऊँचाई) (ध्यान रहें कि पिरामिड की तिर्यक सतहें त्रिभुजाकार होती हैं।)

नोट: निम्नलिखित सूत्र प्रमुख ठोसों के आयतन व पृष्ठीय क्षेत्र के उच्चिष्ट व निम्निष्ठ के लिये बहुत उपयोगी हैं।

नोट: उपरोक्त सिद्धान्त अत्यधिक उपयोगी हैं क्योंकि इस तरह के प्रश्नों में P की स्थिति को परिमिति का फलन बनाकर न्यूनतम करने में हल बहुत लम्बा हो जाता है।

exercise -1

1-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. यदि $f(x) = 1 + 2x^2 + 4x^4 + 6x^6 + \dots + 100x^{100}$ वास्तविक चर x के पदों में कोई बहुपद है, तो फन $f(x)$ रखता है—
 (A) न तो उच्चिष्ट और न ही निम्निष्ठ (B) केवल एक उच्चिष्ट
 (C) केवल न निम्निष्ठ (D) एक उच्चिष्ट एवं एक निम्निष्ठ
2. अंतराल $[0, 1]$ में फलन $x^{25}(1-x)^{75}$ अपना अधिकतम मान x के किस मान रखता है—
 (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{1}{4}$
3. यदि $f(x) = \sin^3 x + \lambda \sin^2 x - \pi/2 < x < \pi/2$ हो, तो λ का वह अंतराल ज्ञात कीजिए जिसके लिए $f(x)$ केवल एक उच्चिष्ट एवं एक निम्निष्ठ रखता हो—
 (A) $(-3/2, 3/2) - \{0\}$ (B) $(-2/3, 2/3) - \{0\}$ (C) R (D) $\left[-\frac{3}{2}, 0\right]$
4. x^x के न्यूनतम मान तथा $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ के अधिकतम मान का गुणन है—
 (A) e (B) e^{-1} (C) 1 (D) e^2
5. $f(x) = \max(x, x+1, 2-x)$ से परिभाषित फन का न्यूनतम मान है—
 (A) 0 (B) 1/2 (C) 1 (D) 3/2
6. यदि $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 3-2x, & x \geq 1 \end{cases}$ हो तो—
 (A) $x=1$ पर फलन $f(x)$ स्थानीय उच्चिष्ट रखता है।
 (B) $x=1$ पर फलन $f(x)$ स्थानीय निम्निष्ठ रखता है।
 (C) $x=1$ पर फलन $f(x)$ कोई स्थानीय चरम बिन्दु नहीं रखता है।
 (D) $x=1$ पर फलन $f(x)$ पर निम्निष्ठ रखता है।
7. फलन $f(x) = 2 - \sqrt{1+2x+x^2}, x \in [-2, 1]$ का उच्चतम एवं न्यूनतम मान है—
 (A) 2, -2 (B) 2, -1 (C) 2, 0 (D) इनमें से कोई नहीं
8. माना $f(x) = \{x\}$ है जहां $\{.\}$ भिन्नात्मक भाग को प्रदर्शित करता है। फलन $f(x)$ के लिये $x = 5$
 (A) स्थानीय उच्चिष्ट का बिन्दु है।
 (B) स्थानीय निम्निष्ठ का बिन्दु है।
 (C) न तो स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु और न ही स्थानीय उच्चिष्ट बिन्दु है।
 (D) इनमें से कोई नहीं
9. फलन $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2}$ के क्रान्तिक बिन्दु है—
 (A) $x \in \{1, 3\}$ (B) $x \in \{0, 1\}$ (C) $x \in \{1, 2\}$ (D) इनमें से कोई नहीं
10. फलन $f(x) = \sin 2x - x$ के लिये अंतराल $[-\pi/2, \pi/2]$ में उच्चतम एवं न्यूनतम मानों का अंतर है—
 (A) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} + \pi/6$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π
11. एक लम्ब वृत्तीय शंकु के अंतर्गत बनाये जा सकने वाले अधिकतम वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल वाले लम्ब वृत्तीय बेलन की त्रिज्या है—

- (A) शंकु के आधार की त्रिज्या की एक तिहाई (B) शंकु के आधार की त्रिज्या की $1/\sqrt{2}$ गुना
 (C) शंकु के आधार की त्रिज्या की $2/3$ गुना (D) शंकु के आधार की त्रिज्या की आधी।
12. दीघवृत्त $(x/4)^2 + (y/3)^2 = 1$ के अंतर्गत बनाए जा सकने वाले अधिकतम क्षेत्रफल के आयत की विमाएं होगी।
 (A) $\sqrt{8}, \sqrt{2}$ (B) 4, 3 (C) $2\sqrt{8}, 3\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{2}, \sqrt{6}$
13. उस आयत का अधिकतम क्षेत्रफल जिसकी एक भुजा x अक्ष पर तथा दो शीर्ष वक्र $y = e^{-x^2}$ पर स्थित है, होगा –
 (A) $\sqrt{2} e^{-1/2}$ (B) $2e^{-1/2}$ (C) $e^{-1/2}$ (D) इनमें से कोई नहीं
14. वक्र $x^2 = 4y$ पर बिस्त बिन्दु जिसकी रेखा $y = x - 4$ से दूरी न्यूनतम है, के निर्देशांक है–
 (A) (2, 1) (B) (-2, 1) (C) (1 -2) (D) (1, 2)
15. बिन्दु (k,0) की वक्र $2x^2 + y^2 - 2x = 0$ से न्यूनतम दूरी है–
 (A) $\sqrt{1+2k-k^2}$ (B) $\sqrt{1+2k+2^2}$ (C) $\sqrt{1-2k+2k^2}$ (D) $\sqrt{1-2k+k^2}$

एक अधिक विकल्प सही

16. यदि $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \forall x \in \mathbb{R}$ हो तो 'f' का न्यूनतम मान
 (A) विद्यमान नहीं है। (B) विद्यमान नहीं है हालांकि f परिवर्द्ध है।
 (C) 1 के बराबर है। (D) -1 के बराबर है।
17. यदि $f(x) = 40/(3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 60)$ हो, तो निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है–
 (A) $x=0$ पर $f(x)$ स्थानीय निम्निष्ठ रखता है
 (B) $x=0$ पर $f(x)$ स्थानीय उच्चिष्ठ रखता है।
 (C) $f(x)$ का परम उच्चिष्ठ मान परिभाषित नहीं है।
 (D) $x=-3$ एवं $x=1$ पर $f(x)$ स्थानीय उच्चिष्ठ रखता है।
18. यदि फलन $f(x) = a \ln|x| + bx^2 + x, x = -1$ एवं $x=2$ पर चरम मान पर रखता हो, तो
 (A) $a = 2, b = -1$ (B) $a = 2, b = -1/2$ (C) $a = -2, b = 1/2$ (D) इनमें सके कोई नहीं
19. माना कि $f(x) = (x^2 - 1)^n(x^2 + x + 1)$ है, तो $x = 1$ पर $f(x)$ स्थानीय चरम मान रखता है, जब
 (A) $n = 2$ (B) $n = 3$ (C) 4 (D) $n = 6$
20. फलन $f(x) = (\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3$ का एक चरम मान है–
 (A) $\frac{7\pi^3}{8}$ (B) $\frac{\pi^3}{8}$ (C) $\frac{\pi^3}{32}$ (D) $\frac{\pi^3}{16}$
21. यदि $f(x) = \frac{x}{1+x \tan x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ हो तो–
 (A) $f(x)$ ठीक एक निम्निष्ठ बिन्दु रखता है। (B) $f(x)$ ठीक एक उच्चिष्ठ बिन्दु रखता है।
 (C) $f(x)$ अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में वर्द्धमान है। (D) x_0 पर उच्चिष्ठ रखता है जबकि $x_0 = \cos x_0$
22. यदि $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x, & x > 1 \end{cases}$ हो तो–
 (A) $x = 1$ पर $f(x)$ उच्चिष्ठ रखता है (B) $f(x)$ का उच्चिष्ठ विद्यमान नहीं है।

(B) $x = -1$ पर $f^{-1}(x)$ निम्निष्ठ रखता है। (D) $x = 1$ पर $f^{-1}(x)$ निम्निष्ठ रखता है।

23. यदि फलन $v = f(x)$ को $x = \phi(t) = t^3 - 5t^2 - 20t + 7$; $y = \psi(t) = 4t^3 - 3t^2 - 18t + 3$ ($|t| < 2$) द्वारा परिभाषित किया जाता है तो-

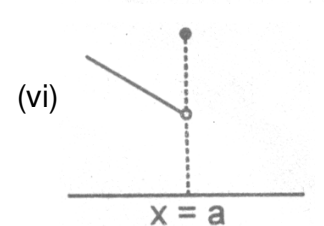
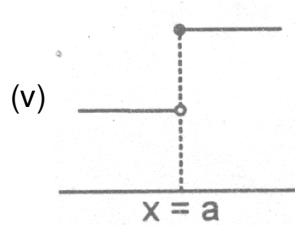
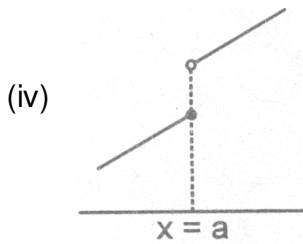
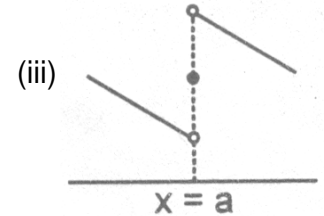
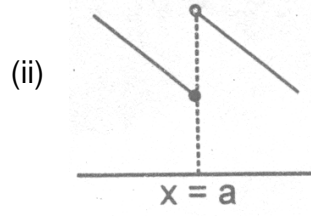
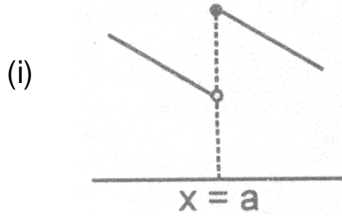
(A) $y_{\max} = 12$ (B) $y_{\max} = 14$ (C) $y_{\min} = -67/4$ (D) $y_{\min} = -69/4$

24. फलन $f(x) = x^{2/3}$ के लिये निम्नलिखित में से सत्य कथन है-

- (A) मूल बिन्दु पर $\frac{dy}{dx}$ का अस्तित्व नहीं है।
 (B) मूल बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा का समीकरण $x=0$ है।
 (C) $x=0$ पर $f(x)$ चरम मान रखता है।
 (D) मूल बिन्दु नति परिवर्तन बिन्दु है।

1.B (विषयात्मक प्रश्न)

1. दिये गये प्रत्येक ग्राफ को देखकर बताइयें कि उसके लिये $x=a$ उच्चिष्ठ बिन्दु, निम्निष्ठ बिन्दु अथवा दोनों ही नहीं है-



2. a व b के वे मान ज्ञात करो जिनके लिये फलन $f(x) = \frac{a}{x} + bx$ बिन्दु $(1,6)$ पर निम्निष्ठ रखता है।

3. निम्नलिखित फलनों के लिये स्थानीय उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ बिन्दु ज्ञात कीजिए।

4. फलन $f(x) = \begin{cases} 2 \sin x & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ के लिये $x=0$ पर उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ की विवेचना कीजिए।

5. दिये गये फलनों के लिये क्रांतिक बिन्दुओं की संख्या ज्ञात करो।

(i) $f(x) = -\frac{3}{4}x^4 - 8x^3 - \frac{45}{2}x^2 + 105$; $x \in R$

(ii) $f(x) = |x-2||x+1|$; $x \in R$

(iii) $f(x) = \min(\tan x, \cot x)$; $x \in (0, \pi)$

6. $f(x) = |x-2|$ का ग्राफ बनाइये तथा स्थानीय उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ बिन्दु भी भात कीजिये।

7. दिये गये फलनों का परम उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ मान ज्ञात करो-

- (i) $f(x) = x^3$; $x \in [-2, 2]$
 (ii) $f(x) = \sin x + \cos x$; $x \in [0, \pi]$
 (iii) $f(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$; $x \in \left[-2, \frac{9}{2}\right]$
 (iv) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 48x + 25$; $x \in [0, 3]$
 (v) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x$; $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

8. यदि $f(x) = x^2$; $x \in [-1, 2]$ हो तो सिद्ध कीजिए कि फलन ठीक एक बिन्दु पर स्थानीय उच्चिष्ठ रखता है लेकिन परम उच्चिष्ठ परिभाषित नहीं है।
9. फलन $f(x) = x + \sqrt{x}$ का $x \in (0, 2)$ के लिए अधिकतम एवं न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।
10. मना $f(x) = \begin{cases} 3-x & 0 \leq x < 1 \\ x^2 + \ln b & x \geq 1 \end{cases}$ b के उन मानों का समुच्चय ज्ञात कीजिए जिनके लिये फलन $f(x)$, $x=1$ पर स्थानीय निम्निष्ठ रखता हो।
11. फलनों (i) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ $f(x) = \operatorname{cosec}(x)$ के लिये स्थानीय उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ बिन्दु ज्ञात कीजिए तथा $f(x)$ का अधिकतम एवं न्यूनतम मान भी ज्ञात कीजिए।
12. सिद्ध कीजिए कि $\sin^p \theta \cos^q \theta$, $\theta, q \in \mathbb{N}$ का अधिकतम मान तब प्राप्त होता है तब $\theta = \tan^{-1} \sqrt{\frac{p}{q}}$ हो। सत्यापित कीजिए कि यह परम उच्चिष्ठ है या नहीं।
13. यदि किसी समकोण त्रिभुज की एक भुजा और कर्ण की लम्बाइयों का योग दिया गया हो, तो सिद्ध कीजिए कि इन भुजाओं के मध्य कोण $\pi/3$ होने पर त्रिभुज का क्षेत्रफल अधिकतम होगा।
14. 20 m लम्बाई वाले एक तार को दो भागों में काटा जाता है। एक भाग से एक वर्ग और दूसरे से एक वृत्त बनाया जाता है। दोनों भागों की लम्बाइयों ज्ञात क्या होनी चाहिए जिससे कि वर्ग एवं वृत्त का कुल क्षेत्रफल न्यूनतम हो।
15. प्रदर्शित करो कि v ऊँचाई तथा α अर्द्धशीर्ष कोण वाले एवं शंकु में बनाये जा सकने वाले सबसे बड़े बेलन का आयतन $\frac{4}{27} \pi h^3 \tan^2 \alpha$ है।
16. सिद्ध कीजिए कि दी गई तिर्यक ऊँचाई और अधिकतम आयतन वाले लम्ब वृत्तीय शंकु का अर्द्धशीर्ष कोण $\tan^{-1} \sqrt{2}$ होगा।
17. एक फुटबाल के मैदान के चारों ओर 440 m लम्बाई का एक आयताकार पथ बनाया जाता है जोकि प्रत्येक सिरे पर अर्द्ध वृत्तकार है। यदि आयताकार भाग का क्षेत्रफल अधिकतम हो, तो इसकी भुजाओं की लम्बाई ज्ञात करो।
18. 36 cm परिमाप वाले उस आयत की विमाएँ (लम्बाई एवं चौड़ाई) ज्ञात करो जिसे उसकी एक भुजा के सापेक्ष घूर्णन कराने पर वह अधिकतम सम्भव आयतन काटता है।
19. उस सबसे बड़े आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसका आधार x -अक्ष और ऊपरी शीर्ष वक्र $y = 12 - x^2$ पर स्थित है।

Exercise -2

2-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

- यदि $f(x) = \begin{cases} \tan^{-1} x, & |x| < \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2} - |x|, & |x| \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$ हो तो $f(x)$

(A) किसी भी बिन्दु पर स्थानीय उच्चिष्ठ नहीं रखता है। (B) केवल एक बिन्दु पर स्थानीय उच्चिष्ठ रखता है।
 (C) ठीक दो बिन्दुओं पर स्थानीय उच्चिष्ठ रखता है। (D) ठीक दो बिन्दुओं पर स्थानीय निम्निष्ठ रखता है।
- यदि $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + 10x - 5, & x \leq 1 \\ -2x \log_2(b^2 - 2), & x > 1 \end{cases}$ हो तो b के उन मानों का समुच्चय जिनके लिए $f(x)$, $x=1$ पर अधिकतम मान रखता है होगा—

(A) $1 \leq b \leq 2$ (B) $b = \{1, 2\}$ (C) $b \in (-\infty, -1)$ (D) $[-\sqrt{130}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{130}]$
- फलन $f(x) = x^3 - 3px^2 + (p^2 - 1)x + 1$ के चरम मान अंतराल $(-2, 4)$ में स्थित हो, तो p के मानों का समुच्चय है—

(A) $(-3, 5)$ (B) $(-3, 3)$ (C) $(-1, 3)$ (D) $(-1, 4)$
- परवलय $y = ax^2 + bx + c$ पर चार बिन्दु A, B, C एवं क्रमानुसार स्थित है। A, B एवं D के निर्देशांक $A(-2, 3)$; $B(-1, 1)$ एवं $D(2, 7)$ है। चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल अधिकतम हो, तो बिन्दु C के निर्देशांक है—

(A) $(1/2, 7/4)$ (B) $(1/2, -7/4)$ (C) $(-1/2, 7/4)$ (D) इनमें से कोई नहीं
- समत्रिभुजाकार प्रिज्म के किसी अधार के केन्द्र की किसी अन्य आधार पर स्थित शीर्ष से दूरी l है। प्रिज्म का आयतन अधिकतम होने के लिये प्रिज्म के शीर्षलम्ब की लम्बाई होगी—

(A) $\frac{l}{2}$ (B) $\frac{l}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{l}{3}$ (D) $\frac{l}{4}$
- किसी आयत के दो शीर्ष धनात्मक x - अक्ष पर स्थित है। अन्य दो शीर्ष, सरल रेखाओं $y = 4x$ तथा $y = 5x + 6$ पर स्थित है। आयत का अधिकतम क्षेत्रफल है—

(A) $4/3$ (B) $3/5$ (C) $4/5$ (D) $3/4$
- सरल रेखा $x + y = 4$ पर स्थित किसी चर बिन्दु P से वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ पर स्पर्श रेखाएँ PA एवं PB खींची गई हो, तो स्पर्श जीवा AB की लम्बाई न्यूनतम होने के लिये बिन्दु P के निर्देशांक होंगे—

(A) $(3, 1)$ (B) $(0, 4)$ (C) $(2, 2)$ (D) $(4, 0)$
- एक पुस्तक में एक पेज के निचले कोने को इस प्रकार मोड़ा जाता है कि यह पेज के आंतरिक किनारे तक पहुंचता है। यदि मोड़े गये भाग का क्षेत्रफल न्यूनतम हो, तो मोड़ा गया चौड़ाई का भाग है—

(A) $5/8$ (B) $2/3$ (C) $3/4$ (D) $4/5$
- यदि वक्र $f(x) = x - x^2$ पर स्थित दो बिन्दुओं के भुज x_1 एवं x_2 अंतराल $[0, 1]$ में स्थित हो, तो व्यंजक $(x_1 + x_2) - (x_1^2 + x_2^2)$ का अधिकतम मान है—

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) 1 (D) 2
- आयत का अधिकतम क्षेत्रफल जिसकी भुजाएं a एवं b लम्बाइयों वाली भुजाओं से बने आयत के शीर्षों से गुजरती है, होगा—

- (A) $2(ab)$ (B) $\frac{1}{2}(a+b)^2$ (C) $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ (D) इनमें से कोई नहीं

11. फलन $f(x) = 2^{x^2} - 1 + \frac{2}{2^{x^2} + 1}$ का न्यूनतम मान है—
 (A) 0 (B) $3/2$ (C) $2/3$ (D) 1

एक से अधिक विकल्प सही

12. यदि $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]$ जहां $[.]$ महत्तम पूर्णांक फल को प्रदर्शित करता है तथा $f(x)$ एक चर सत् फलन है,
 (A) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ एक पूर्णांक है (B) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ एक अपूर्णांक है
 (C) $x = a$ पर $f(x)$ स्थानीय उच्चिष्ठ रखता है (D) $x = a$ पर $f(x)$ स्थानीय निम्निष्ठ रखता है

13. यदि $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 10x & -1 \leq x < 0 \\ \sin x & 0 \leq x < \pi/2 \\ 1 + \cos x & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$

हो तो $f(x)$ रखता है—

- (A) $x = \pi/2$ पर स्थानीय उच्चिष्ठ (B) $x = \pi/2$ पर स्थानीय निम्निष्ठ
 (C) $x = 0$ एवं π पर परम निम्निष्ठ (D) $x = \pi/2$ पर परम उच्चिष्ठ

14. एक समकोण त्रिभुज की उन भुजाओं का योग 9 m है, जहां समकोण हो। जब इस त्रिभुज को इसकी किसी लम्बवत् भुजा (leg) के सापेक्ष घूर्णन कराया जाता हो, तो अधिकतम आयतन का एक शंकु निर्मित होता है। तब ऐसे शंकु के लिये—

- (A) तिर्यत ऊँचाई $3\sqrt{5}$ है। (B) अधिकतम आयतन 32π है।
 (C) वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $18\sqrt{5}\pi$ है। (D) अर्द्धशीर्ष कोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ है।

15. फलन $f(x) = \sin x - x \cos x$

- (A) π के सभी पूर्णांक गुणज के लिये अधिकतम अथवा न्यूनतम है।
 (B) अधिकतम है यदि x, π का धनात्मक विषम पूर्णांक या ऋणात्मक सम पूर्णांक गुणज है।
 (C) न्यूनतम है यदि x, π का धनात्मक सम पूर्णांक या ऋणात्मक विषम पूर्णांक गुणज है।
 (D) इनमें से कोई नहीं

16. वक्र $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ के लिये—

- (A) $x = 1$ नति परिवर्तन बिन्दु है। (B) $x = -2 + \sqrt{3}$ नति परिवर्तन बिन्दु है।
 (C) $x = -1$ निम्निष्ठ बिन्दु है। (D) $x = -2 - \sqrt{3}$ नति परिवर्तन बिन्दु है।

2-B (विषयात्मक प्रश्न)

1. यदि $y = \frac{ax+b}{(x-1)(x-4)}$ बिन्दु (2,-1) पर एक चरम मान रखता हो, तो a एवं b के मान ज्ञात कीजिए तथा यह भी प्रदर्शित कीजिए कि यह चरम मान उच्चिष्ठ है।
2. फलन $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{3}\cos 3x$ के अधिकतम एवं न्यूनतम मानों का अन्तर ज्ञात कीजिए।
3. किसी ट्रेन को चलाने पर आने वाला ईंधन खर्च ट्रेन की m.p.h. में चाल के वर्ग के समानुपाती होता है और 16 mph की चाल पर 48 रुपये प्रति घण्टा खर्च आता है। आर्थिक रूप से सर्वाधिक चाल क्या होगी यदि वेतन आदि को मिलाकर नियत खर्च 300 रुपये प्रति घंटा हो।
4. किसी समलम्ब चतुर्भुज की तीन भुजायें परस्पर बराबर हैं तथा प्रत्येक की लम्बाई 6 सेमी. है। इसका अधिकतम क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. वक्र $4x^2 + a^2y^2 = 4a^2$, $4 < a^2 < 8$ पर स्थित वह बिन्दु ज्ञात करो जो बिन्दु (0,-2) से अधिकतम दूरी पर है।
6. 18 m^2 क्षेत्रफल वाली एक पोस्टर शीट में ऊपर एवं नीचे प्रत्येक ओर 75 cms जबकि दांयी एवं बांयी प्रत्येक ओर 50 cms जगह खाली है। यदि पोस्टर पर छपे भाग का क्षेत्रफल अधिकतम हो, तो पोस्टर की विमाएँ ज्ञात कीजिये।
7. a के उन मानों का समुच्च ज्ञात कीजिए जिनके लिये फलन $f(x) = \frac{ax^3}{3} + (a+2)x^2 + (a-1)x + 2$ एक ऋणात्मक निम्निष्ठ बिन्दु रखता है।
8. वक्र $y = x^2 + 1$ के किस बिन्दु (a,b) पर खींची गई स्पर्श रेखा वक्रों $y = x^2 + 1$, $y = x$, $x = 0$ एवं $x = 1$ से परिबद्ध आकषति को इस प्रकार काटती है कि अधिकतम क्षेत्रफल वाला एक समलम्ब चतुर्भुज प्राप्त होता है।
9. a त्रिज्या वाले एक वृत्त पर स्थित बिन्दु P पर खींची गई एक स्पर्श रेखा पर, वृत्त पर ही स्थित एक स्थिर बिन्दु A से लम्ब AY खींचा जाता हो, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज APY का अधिकतम क्षेत्रफल $3\sqrt{3}\frac{a^2}{8}$ वर्ग इकाई होगा।
10. एक छः घात वाला बहुपत $f(x)$ ज्ञात कीजिए जो $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x^3}\right)^{1/x} = e^2$ को संतुष्ट करता है और $x = 1$ पर स्थानीय उच्चिष्ठ और $x=0$ एवं 2 पर स्थानीय निम्निष्ठ रखता है।
11. वृत्त $x^2 + y^2 = 1$, x-अक्ष को बिन्दु P तथा Q पर काटता है। एक दूसरा वृत्त जिसका केन्द्र Q तथा त्रिज्या चर है, प्रथम वृत्त को x अक्ष के ऊपर R बिन्दु पर काटता है तथा रेखाखण्ड PQ को S पर काटता है। ΔQSR का अधिकतम क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Exercise -3

3-A(स्तम्भ मिलान)

1. स्तम्भ-I
- (A) 4cm भुजा के एब समबाहु त्रिभुज के अंतर्गत एक आयत खींचा जाता है। ऐसे आयत का अधिकतम क्षेत्रफल है-
- (B) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 20 = 2$ के बीच महत्तम दूरी 3λ हो तो $\lambda =$
- (C) जब $x \in [0,4]$ हो तो $x^3 - 3x^2 - x + 3$ का अधिकतम मान $5k$ है तब $k =$
- (D) $\cos^4 x - 6 \cos^2 x + 5$ का न्यूनतम मान है-
- स्तम्भ- II
- (p) $2\sqrt{3}$
- (q) 0
- (r) 32
- (s) 3

2. स्तम्भ-I
- (A) यदि $a + b = 8$, $a, b > 0$ तब $a^3 + b^3$ न्यूनतम मान है।
- (B) आयाताकार बंद संदूक का आयतन 72 है और उसके आधार की भुजाएं 1:2 में हैं न्यूनतम कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल है-
- (C) समद्विबाहु त्रिभुज की परिमाप 4 है जब इसको इसके आधार के सापेक्ष घुमाया जाता है कि संभावित आयतन अधिकतम है जहां त्रिभुज की भुजा $\frac{a}{4}$ तथा आधार की लम्बाई $= \frac{b}{2}$ है तब $(a+b)^2$ बराबर है-
- (D) $\sqrt{5}$ त्रिज्या के अर्द्धवृत्त में बने अधिकतम परिमाप वाले आयत की भुजाओं a व b हैं तब $a^3 + b^3$
- स्तम्भ- II
- (p) 65
- (q) 64
- (r) 128
- (s) 108

3-B (कथन/कारण)

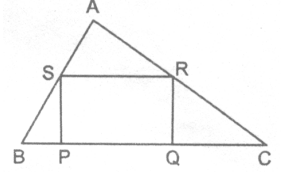
3. कथन -1 दियेगये ABC की भुजाएं a, b, c तथा बिन्दु D, E, F क्रमशः भुजा BC, CA, AB पर इस प्रकार है कि AFDE एक समान्तर चतुर्भुज है। सामान्तर चतुर्भुज का अधिकतम क्षेत्रफल $\frac{1}{4}bc \sin A$ है।
- कथन -2 $2kx - x^2$ का अधिकतम मान $x = k$ पर है।
- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है: कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
- (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है: कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
- (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
- (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है:।
4. कथन-1 वक्र $y = x^2$ से बिन्दु $(0, y_0)$ की न्यूनतम दूरी y_0 है यदि $0 \leq y_0 \leq \frac{1}{2}$ हो
- कथन-2: एक फलन का उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ सदैव $f'(x)=0$ का एक मूल है।
- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है: कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
- (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है: कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
- (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
- (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है:।
- दोनों कथनों में $[.]$ महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।
- कथन -1 $\sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right)[x]$ का अधिकतम मान $\sin\frac{3}{2}$ है।
- कथन -2 $[\sin x]$, जहां $x \in \mathbb{R}$ का अधिकतम मान 1 है।

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है: कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है: कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है:।

6. माना $f(x) = x^{50} - x^{20}$
 कथन-1 $[0, 1]$ में $f(x)$ का परम उच्चिष्ठ 0 है।
 कथन-2 $f(x)$ का क्रांतिक बिन्दु $x = 0$ है।
 (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है: कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है: कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है:।

3-C (अनुच्छेद)

7. अनुच्छेद
 मना चित्रानुसार त्रिभुज ABC जिसका आधार 36 और ऊँचाई 12 है, के अन्दर आयत PQRS है।



- 7.1 यदि SR आधार हो, तो त्रिभुज ASR की ऊँचाई है।
 (A) 3 SR (B) $\frac{SR}{3}$ (C) $\frac{SR}{12}$ (D) 12 SR
- 7.2 PQRS का अधिकतम क्षेत्रफल है—
 (A) 112 (B) 111 (C) 108 (D) 120
- 7.3 PQRS के विकर्ण का न्यूनतम लम्बाई है—
 (A) $\sqrt{\frac{648}{5}}$ (B) $\sqrt{\frac{1296}{5}}$ (C) $\sqrt{\frac{54}{5}}$ (D) $6\sqrt{\frac{6}{5}}$

8. अनुच्छेद
 मनाकि एक फलन $f(x) = \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} - x\right)(4 - 3x^2)$ है, जहाँ α एक धनात्मक प्राचल है।

- 8.1 α के एक दिये गये मान के लिए $f(x)$ के चरम बिन्दुओं की संख्या है—
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- 8.2 $f(x)$ के स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ मानों के अन्तर का निरपेक्ष मान α के पदों में है—
 (A) $\frac{4}{9}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3$ (B) $\frac{2}{9}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3$ (C) $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3$ (D) α से स्वतंत्र
- 8.3 $f(x)$ के स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ मानों के निरपेक्ष अन्तर का न्यूनतम संभव मान है—
 (A) $\frac{32}{9}$ (B) $\frac{16}{9}$ (C) $\frac{8}{9}$ (D) $\frac{1}{9}$

9. अनुच्छेद
 मना कि $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

- 9.1 वक्र में कुल चरम बिन्दु है—
 (A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 1
- 9.2 वक्र पर स्थित किसी बिन्दु पर प्रवणता का अधिकतम मांपाक है—
 (A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$
- 9.3 $x = 0$ पर $f^{IV}(x)$ का मान है—
 (A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं

.....
3-D (सत्य/असत्य कथन)

10. माना $f(x)=x; x \in (0,1)$. $f(x)$ के लिये कोई स्थानीय निम्निष्ठ/उच्चिष्ठ बिन्दु विद्यमान नहीं है।
11. फलन $f(x) = (3-x)e^{2x} - 4x e^x - x$, $x=0$ पर उच्चिष्ठ रखता है।
12. बहुपद $x(x+1)(x+2)(x+3)$ का न्यूनतम मान -1 है।
13. दो प्रतिरोधें R_1 एवं $R_2 (R_1, R_2 > 0)$ का संयुक्त प्रतिरोध R सम्बन्ध $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ द्वारा दिया जाता है। यदि $R_1 + R_2$ नियत $R_1 = R_2$ होने पर प्रतिरोध R का मान अधिकतम प्राप्त होता है।
14. प्रदर्शित कीजिए कि दिये गये आयतन वाले एक बेलन जो ऊपर से खुला है, का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल न्यूनतम होगा जबकि इसकी ऊँचाई इसके आधार की त्रिज्या के बराबर हो।

.....
3-E (रिक्त स्थान की पूर्ति)

15. a के वे मान जिनके लिये फलन $f(x) = (4a-3)(x+\log 5) + 2(a-7) \cot \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{2}$ क्रांतिक बिन्दु नहीं रखता हो, ---- है।
16. यदि $f(x) = \frac{(\sin^{-1} x + \tan^{-1} x)}{\pi} + 2\sqrt{x}$ हो तो $f(x)$ सर ---- है।
17. $4x^2 + 12xy + 10y^2 - 4y + 3 = 0$ के लिये y का न्यूनतम तथा अधिकतम मान ---- एवं -- है।
18. वक्र $y = x/(1+x^2)$ पर स्थित ऐसे बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिस पर स्पर्श रेखा की प्रवणता अधिकतम हो।
19. बिन्दु $P(0, h)$ से वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ पर स्पर्श रेखाएँ खींची जाती हैं। ये स्पर्श रेखाएँ x -अक्ष को A एवं B पर मिलती हैं। यदि ΔPAB का क्षेत्रफल न्यूनतम हो, तो $h =$

Exercise -4

.....
4-A (पूर्ववर्ती JEE परीक्षा प्रश्न)

IIT-JEE-2008

1. फलन $f(x) = \begin{cases} (2+x)^3, & -3 > x \leq -1 \\ x^{2/3}, & -1 < x < 2 \end{cases}$ के स्थानीय उच्चिष्ठों (local maxima) व स्थानीय निम्निष्ठों (local minima) की कुल संख्या है—
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
2. **स्तम्भ I** **स्तम्भ II**
- (A) $\frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$ का निम्निष्ठ है। (p) 0
- (B) माना A व B वास्तविक से निर्मित 3x3 क्रम का आव्यूह है, जहां A सममित है B विषम सममित है और $(A+B)(A-B) = (A-B)(A+B)$ यदि $(AB)^t = (-1)^t AB$, जहां आव्यूह AB का परिवर्त आव्यूह $(AB)^t$ है तब k के सम्भावित मान है। (q) 1
- (C) माना $a = \log_3 \log_3 2$, $1 < 2^{(-k3^{-8})} < 2$ को संतुष्ट करने वाला पूर्णांक k का मान जिससे छोटा हो चाहिए वह है— (r) 2
- (D) यदि $\sin \theta = \cos \phi$ हो, तो $\frac{1}{\pi}(\theta \pm \phi - \frac{\pi}{2})$ के सम्भावित मान है। (s) 3

IIT-JEE-2006

3. $f(x)$ एक त्रिघातीय बहुपद है जो $x=-1$ पर स्थानीय उच्चिष्ठ रखता है। यदि $f(2) = 18$, $f(1) = -1$ और $x=0$ पर फलन $f'(x)$ के लिये स्थानीय निम्निष्ठ प्राप्त होता है, तो —
 (A) उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ बिन्दु के मध्य दूरी $2\sqrt{5}$ है।
 (B) $x \in [1, 2\sqrt{5}]$ के लिये $f(x)$ वर्धमान फलन है।
 (C) $x=1$ पर $f(x)$ के लिये स्थानीय निम्निष्ठ प्राप्त है।
 (D) $f(0)=5$
4. यदि $f(x)$ दो बार अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि $f(a) = 0$, $f(b) = 2$, $f(c) = -1$, $f(d) = 2$, $f(e) = 0$ जहां $a < b < c < d < e$ हो तो $g(x) = (f'(x))^2 + f(x)$. $f''(x)$ के अंतराल $[a, e]$ में न्यूनतम हलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

IIT-JEE-2005

5. $p(x)$ एक त्रिघातीय बहुपद है जो $x=-1$ पर उच्चिष्ठ रखता है तथा $p(-1)=10$, $p(1)=-6$ है और $x=1$ पर $p'(x)$ निम्निष्ठ रखता है, तो वक्र के स्थानीय उच्चिष्ठ एवं स्थानीय निम्निष्ठ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

IIT-JEE-2004

6. यदि $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ तथा $0 < b^2 < c$ हो तो अंतराल $(-\infty, \infty)$ में
 (A) $f(x)$ निरंतर वर्धमान फलन है। (B) $f(x)$ एक स्थानीय उच्चिष्ठ रखता है।
 (C) $f(x)$ निरंतर ह्रासमान है। (D) $f(x)$ परिवर्द्ध है।
7. सिद्ध कीजिए कि करो $\sin x + 2x \geq \frac{3x(x+1)}{\pi}, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (यदि असमिका का प्रयोग किया हो, तो उसके पक्ष में तर्क दीजिए)

IIT-JEE-2003

8. बिन्दु P(6,8) से वृत्त $x^2+y^2=r^2$ पर स्पर्श रेखाएं खींची गई हैं। यदि स्पर्श रेखाओं एवं स्पर्श जीवा से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल अधिकतम हो, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

IIT-JEE-2001

9. माना $f(x) = (1+b^2)x^2+2bx+1$ तथा इसका न्यूनतम मान $m(b)$ है। यदि b परिवर्तनशील हो, तो $m(b)$ का परिसर होगा –
 (A) $[0,1]$ (B) $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ (C) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (D) $(0,1]$

IIT-JEE-2000

10. यदि $f(x) = \begin{cases} |x|, & 0 < |x| < 2 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ हो तो $x=0$ पर
 (A) एक स्थानीय उच्चिष्ठ है। (B) कोई स्थानीय उच्चिष्ठ नहीं है।
 (C) एक स्थानीय निम्निष्ठ है। (D) कोई चरम मान नहीं है।

IIT-JEE-1998

11. यदि $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}; \forall x \in \mathbb{R}$ हो तो f का न्यूनतम मान
 (A) विद्यमान नहीं है क्योंकि f अपरिबद्ध है। (B) f के परिबद्ध होने पर भी विद्यमान नहीं है।
 (C) 1 के बराबर है। (D) -1 के बराबर है।
12. x के ऐसे मानों की संख्या जिन पर फलन $f(x) = \cos x + \cos(\sqrt{2}x)$ का मान अधिकतम होता हो, है—
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) अनन्त
13. माना कि कोई फलन $f(x)$ निम्नलिखित शर्तों को संतुष्ट करता है—
 (i) $f(0)=2, f(1)=1$
 (ii) $x = \frac{5}{2}$ पर x न्यूनतम मान रखता है एवं
 (iii) x के सभी मानों लिये $f'(x) = \begin{vmatrix} 2ax & 2ax-1 & 2ax+b+1 \\ B & b+1 & -1 \\ 2(ax+b) & 2ax+2b+1 & 2ax+b \end{vmatrix}$

जहां a, b अचर हो, तो अचर a, b तथा फलन $f(x)$ का मान ज्ञात कीजिए।

.....
4-B(पूर्ववर्ती AIEEE/DCE परीक्षा प्रश्न)

14. यदि p और q धनात्मक वास्तविक संख्याएं इस प्रकार हैं कि $p^2+q^2=1$ हो, तो $(p+q)$ का अधिकतम मान है—
 (A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\sqrt{2}$
15. फलन $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ का स्थानीय निम्निष्ठ है—
 (A) $x=-2$ पर (B) $x=0$ पर (C) $x=1$ पर (D) $x=2$ पर
16. यदि x वास्तविक हो, तो $\frac{3x^2+9x+17}{3x^2-x+7}$ का अधिकतम मान है—
 (A) 41 (B) 1 (C) 17/17 (D) 1/4

17. त्रिभुजाकार पार्क कि दो भुजाओं को x समान लम्बाई की तारों की बाड़ (fence) तथा तीसरी भुजा को सीधी दी के किनारे से बनाया गया है, तब पार्क का अधिकतम क्षेत्रफल है।
 (A) $\sqrt{\frac{x^3}{8}}$ (B) $\frac{1}{2}x^2$ (C) πx^2 (D) $\frac{3}{2}x^2$
18. वास्तविक संख्या x में जब इसके प्रतिलोम को जोड़ा जाता हो, तो प्राप्त योगफल का न्यूनतम मान होगा यदि $x =$
 (A) 2 (B) 1 (C) -1 (D) -2
19. यदि फलन $f(x) = 2x^3 - 9ax^2 + 12a^2x + 1$ जहां $a > 0$ इसका अधिकतम और न्यूनतम मान क्रमशः p और q पर प्राप्त करता हो ताकि $p^2 = q$ हो तो a का मान है—
 (A) 3 (B) 1 (C) 2 (D) 1/2
20. $[0, 2]$ अंतराल में $x^3 - 3x$ का अधिकतम मान है—
 (A) 1 (B) 2 (C) 0 (D) -2
21. $\frac{1}{3\sin\theta - 4\cos\theta + 7}$ का न्यूनतम मान है—
 (A) $\frac{7}{12}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{6}$
22. प्रतिबंध $x + y \leq 10, y = 4, y > 0$ के संदर्भ में $z = 5x - 4y$ का न्यूनतम मान जिस बिन्दु पर होग, वह है—
 (A) (6, 4) (B) (-10, 4) (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{6}$
23. $(x - p)^2 + (x - q)^2 + (x - r)^2$ का अधिकतम मान होगा यदि $x =$
 (A) pqr (B) $\sqrt[3]{pqr}$ (C) $\frac{p+q+r}{3}$ (D) $p^2 + q^2 + r^2$
24. x के उन मानों की संख्या जहां पर $f(x) = \cos x + \cos \sqrt{2}x$ अधिकतम मान प्राप्त करता हो, है—
 (A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) अनन्त
25. प्रतिबंध $x + y - 20 \leq 0, y \geq 5, x \geq 0, y \geq 0$ के संदर्भ $x = 7x - 8y$ के न्यूनतम मान के लिए बिन्दु के निर्देशांक है—
 (A) (20, 0) (B) (15, 5) (C) (0, 5) (D) (0, 20)
26. $f(a) = (2a^3 - 3) + 2(3 - a) + 4$ का अधिकतम मान है—
 (A) 15/2 (B) (11/2) (C) (-13/2) (D) 13/2
27. प्रतिबंध $0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \leq \frac{\pi}{2}$ एवं $\cot \alpha_1 \cot \alpha_2 \dots \cot \alpha_n = 1$ के तहत $\cot \alpha_1 \cot \alpha_2 \dots \cot \alpha_n \dots \cos \alpha_n$ का अधिकतम मान है—
 (A) $1/2^{n/2}$ (B) $1/2^n$ (C) $-1/2^n$ (D) 1
28. वक्र $4x^2 + a^2y^2 = 4a^2, 4 < a^2 < 8$ पर वह बिन्दु जो बिन्दु (0, -2) से अधिकतम दूरी पर हो, है—
 (A) (2, 0) (B) (0, 2) (C) (2, -2) (D) (-2, 2)

Answers

EXERCISE # 1-A

1. C 2. D 3. A 4. C 5. D 6. A 7. C
 8. B 9. C 10. D 11. D 12. C 13. A 14. A
 15. C 16. D 17. ACD 18. B 19. ACD
 20. AC 21. BD 22. AC 23. BD 24. AC

EXERCISE # 1-B

1. (i) उच्चिष्ठ (ii) निम्निष्ठ
 (iii) न तो उच्चिष्ठ न ही निम्निष्ठ
 (iv) न तो उच्चिष्ठ न ही निम्निष्ठ
 (v) न तो उच्चिष्ठ न ही निम्निष्ठ (VI) उच्चिष्ठ
2. $a = b = 3$
3. (i) $x = 1$ पर स्थानीय उच्चिष्ठ $g = 6$ पर स्थानीय निम्निष्ठ
 (ii) $x = -\frac{1}{5}$ पर स्थानीय उच्चिष्ठ, $x = -$ स्थानीय निम्निष्ठ
 (iii) $x = \frac{1}{e}$ स्थानीय निम्निष्ठ कोई स्थानीय उच्चिष्ठ नहीं
4. minima at $x = 0$
5. (i) 3 points $x=0, -3, -5$
 (ii) ∞ points $x \in [-1, 2]$
 (iii) 2 points, $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$
6. स्थानीय उच्चिष्ठ at $x=1$ स्थानीय निम्निष्ठ $x = 2$
7. (i) उच्चिष्ठ = 8, निम्निष्ठ = -8
 (ii) उच्चिष्ठ = $\sqrt{2}$, निम्निष्ठ = -1
 (iii) उच्चिष्ठ = 8, निम्निष्ठ = -10
 (iv) उच्चिष्ठ = 25 निम्निष्ठ = -39
 (v) $x = \frac{\pi}{6}$ पर उच्चिष्ठ अधिकतम मान = $\frac{3}{4}$; $x = 0$ एवं $\frac{\pi}{2}$ पर निम्निष्ठ न्यूनतम मान = $\frac{1}{2}$
9. अधिकतम एवं न्यूनतम मान परिभाषित नहीं है।
10. $b \in (0, e)$
11. (i) $x = -1$ पर स्थानीय उच्चिष्ठ, $f(x)$ का अधिकतम मान = -2, $x=1$ पर स्थानीय निम्निष्ठ, $f(x)$ का न्यूनतम मान = 2
 (ii) $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in I$ पर स्थानीय निम्निष्ठ, $f(x)$ का न्यूनतम मान = 1, $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in I$ पर स्थानीय उच्चिष्ठ $f(x)$ का अधिकतम मान = -1

12. यह परम उच्चिष्ठ 14. $\frac{80}{\pi+4}, \frac{20\pi}{\pi+4}$

17. 110m, 70m 18. 12cm, 6 cm
 19. 32 aq. units

EXERCISE #2-A

1. C 2. D 3. C 4. A 5. B 6. C 7. C
 8. B 9. A 10. B 11. D 12. AD 13. AC
 14. AC 15. BC 16. ABD

EXERCISE #2-B

1. $a = 1, b = 0$ 2. $9/4$ 3. 40 mph
 4. $27\sqrt{3}$ sq.cms 5. (0, 2)
 6. चौड़ाई $2\sqrt{3}m$ लम्बाई $3\sqrt{3}m$ 7. $(1, \infty)$
 8. $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ 10. $f(x) = 2x^4 - \frac{12}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^6$
 11. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

EXERCISE # 3

- 1.(A) \rightarrow (p),(B) \rightarrow (s) (C) \rightarrow (s), (D) \rightarrow (q)
 2.(A) \rightarrow (r), (B) \rightarrow (s)(C) \rightarrow (q), (D) \rightarrow (p)
 3. A 4. C 5. D6. B 7. B 7.2 C 7.3 A
 8.1 C 8.2 A 8.3 A9.1 B 9.2 C 9.3 B
 10. सत्य 11. असत्य 12. सत्य 13. सत्य
 14. सत्य 15. $(-\infty, -4/3) \cup (2, \infty)$ 16. $\left[0, \frac{11}{4}\right]$
 17. $y_{\max} = 3$ and $y_{\min} = 1$ 18. (0, 0) 19. $4\sqrt{2}$

EXERCISE # 4

1. C
 2. (A) \rightarrow (r), (B) \rightarrow (q,s), (C) \rightarrow (r,s), (D) \rightarrow (p,r)
 3. BC 4. 6 solutions 5. $4\sqrt{65}$ 6. A
 8. 5 units. 9.D 10. A 11. D 12. B

13. $a = \frac{1}{4}; b = -\frac{5}{4}; f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 5x + 8)$ 21. C 22. D 23. C 24. A 25. A 26. D 27. A
 28. B
 14. D 15. D 16. A 17. B 18. C 19. C 20. C

MQB

EXERCISE # 1 (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. समीकरण $x^3 - 3x + [a] = 0$ जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है, के मूल वास्तविक एवं भिन्न होंगे यदि
 (A) $a \in (-\infty, 2)$ (B) $a \in (0, 2)$ (C) $a \in (\infty, -2) \cup (0, \infty)$ (D) $a \in [-1, 2]$
2. यदि $f(x) = \sin \frac{\{x\}}{a} + \cos \frac{\{x\}}{a}$ जबकि $a > 0$ एवं $\{.\}$ भिन्नात्मक भाग फलन को दर्शाता है, तो f का मान अधिकतम होने के लिये a के मानों का समुच्चय होगा—
 (A) $\left(0, \frac{4}{\pi}\right)$ (B) $\left(\frac{4}{\pi}, \infty\right)$ (C) $(0, \infty)$ (D) इनमें से कोई नहीं
3. यदि फलन $f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + b$ के सभी स्थानीय चरम मान धनात्मक हो एवं स्थानीय निम्निष्ठ मान $x=1$ पर मिलते हो, तो क्रमित युग्म (a, b) का मान होगा—
 (A) (3, 5) (B) (3, 6) (C) (3, 4) (D) (3, 3)
4. एक फलन इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x) = ax^2 - b|x|$ जहाँ a एवं b अचर है, तब $x=0$, $(f(x))$ का उच्चिष्ठ हो यदि —
 (A) $a > 0, b > 0$ (B) $a > 0, b < 0$ (C) $a < 0, b < 0$ (D) $a < 0, b > 0$
5. यदि दो बिन्दु $A(2, 0)$ एवं $B(0, 2)$ हो, तो सरल रेखा $2x + 3y + 1 = 0$ पर स्थित बिन्दु P
 (A) $(7, -5)$ होगा यदि IPA-PBI अधिकतम हो (B) $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$ होगा यदि IPA-PBI अधिकतम हो
 (C) $(7, -5)$ होगा यदि IPA-PBI न्यूनतम हो (D) $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$ होगा यदि IPA-PBI न्यूनतम हो
6. $b > 0$ के लिये फलन $f(x) = 2bx^2 - x^4 - 3b$ का अधिकतम मान $g(b)$ है। यदि b परिवर्तनशील हो, तो $g(b)$ का न्यूनतम मान होगा—
 (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{9}{2}$ (C) $-\frac{9}{4}$ (D) $-\frac{9}{2}$
7. समीकरण $3x^2 - 2x^3 = \log_2(x^2 + 1) - \log_2 x$ के हलों की संख्या है।
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) इनमें से कोई नहीं
8. यदि $a^2x^4 + b^2y^4 = c^6$, तो xy का अधिकतम मान है—
 (A) $\frac{c^3}{2ab}$ (B) $\frac{c^3}{\sqrt{2|ab|}}$ (C) $\frac{c^3}{ab}$ (D) $\frac{c^3}{\sqrt{|ab|}}$
9. $f(x) = \max(\sin t), 0 < t < x, 0 \leq x \leq 2\pi$ का अधिकतम तथा न्यूनतम मान है—
 (A) 1, 0 (B) 1, -1 (C) 0, -1 (D) इनमें से कोई नहीं
10. फलन $f(x) = (x+1)^{1/3} - (x-1)^{1/3}$ का अंतराल $[0, 1]$ में उच्चतम मान है—
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) $2^{1/3}$
11. सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए $f(x) = x^p (1-x)^q$, जहाँ p एवं q धनात्मक पूर्णांक है, से परिभाषित फलन 'f' का मान अधिकतम होगा,

जब $x=$

- (A) $\frac{pq}{p+q}$ (B) 1 (C) 0 (D) $\frac{p}{p+q}$

12. वक्र $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 27$ की अधिकतम प्रवणता होगी—

- (A) $-165/8$ (B) -27 (C) 5 (D) इनमें से कोई नहीं

13. किसी S क्षेत्रफल वाले समकोण त्रिभुज के परिगत वृत्त का न्यूनतम क्षेत्रफल है—

- (A) πS (B) $2\pi S$ (C) $\sqrt{2} \pi S$ (D) $4\pi S$

14. दो बिन्दु $A(1, 4)$ एवं $B(3, 0)$ दीर्घवृत्त $2x^2 + y^2 = 18$ पर स्थित हैं। दीर्घवृत्त पर एक अन्य बिन्दु C इस प्रकार है कि ΔABC का क्षेत्रफल अधिकतम है, तो बिन्दु 'C' के निर्देशांक हैं—

- (A) $(\sqrt{6}, \sqrt{6})$ (B) $(-\sqrt{6}, \sqrt{6})$ (C) $(\sqrt{6}, -\sqrt{6})$ (D) $(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$

15. एक समष्टभुजिय पिरामिड का पार्श्व किराना (Lateral edge) 1cm है। यदि इस पिरामिड का आयतन अधिकतम हो, तो इसकी ऊँचाई है—

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) 1

16. यदि $f(x) = 5x - 2x^2 + 2$; $x \in \mathbb{N}$ हो, तो $f(x)$ अधिकतम मान होगा—

- (A) 8 (B) 5 (C) 4 (D) $\frac{41}{8}$

17. $f(x)$ का उच्चिष्ठ है, यदि $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$, $x \in f$ का प्रान्त

- (A) -1 (B) 2 (C) 1 (D) $1/2$

एक से अधिक विकल्प सही

18. यदि किसी विषम त्रिघातीय बहुपत के अवकलज का मान x के दो भिन्न मानों पर शून्य हो जाता है, तो—

- (A) बहुपत में x^3 एवं x के गुणांकों के चिन्ह एक समान होने चाहिए।
 (B) बहुपत में x^3 एवं x के गुणांकों के चिन्ह भिन्न-भिन्न होने चाहिए।
 (C) x के लिन मानों पर अवकलज शून्य हो जाता है वे मूलबिन्दु के किसी भी तरफ स्थित मूलों की तुलना में मूलबिन्दु के पास है।
 (D) x के जिन मानों पर अवकलज शून्य हो जाता है वे मूलबिन्दु के किसी भी तरफ स्थित मूलों की तुलना में मूलबिन्दु से दूर है।

19. फलन $f(x) = \ln(2x - x^2) + \sin \frac{\pi x}{2}$ हो, तो

- (A) फलन f का ग्राफ सरल रेखा $x=1$ के सापेक्ष सममित है।
 (B) फलन f का ग्राफ सरल रेखा $x=2$ के सापेक्ष सममित है।
 (C) f का अधिकतम मान 1 है।
 (D) f का न्यूनतम मान विद्यमान नहीं है।

20. $y = \frac{ax^2 + 2bx + c}{Ax^2 + 2Bx + C}$ के अधिकतम एवं न्यूनतम मान वे हैं जिनके लिए

- (A) $ax^2 + 2bx + c - y(Ax^2 + 2Bx + C)$ का मान शून्य है।
 (B) $ax^2 + 2bx + c - y(Ax^2 + 2Bx + C)$ एक पूर्ण वर्ग है।

(C) $\frac{dy}{dx} = 0$ एवं $\frac{d^2y}{dx^2} \neq 0$

(D) $ax^2 + 2bx + c - y(Ax^2 + 2Bx + C)$ एक पूर्ण वर्ग नहीं है।

21. फलन $f(x) = \frac{2-x}{\pi} \cos \pi(x+3) + \frac{1}{\pi^2} \sin \pi(x+3)$ $0 < x < 4$ के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ बिन्दु है—
 (A) $x = 1$ (B) $x = 2$ (C) $x = 3$ (D) $x = \pi$

22. यदि $f(x) = \log(x-2) - \frac{1}{x}$ हो तो—
 (A) अंतराल $[2, \infty]$ में $f(x)$ एकदिष्ट वर्धमान है
 (B) अंतराल $[-1, 2]$ में $f(x)$ एकदिष्ट वर्धमान है
 (C) $f(x)$ हमेशा नीचे की ओर अवतल (concave downwards) है
 (D) $f^{-1}(x)$ जहां परिभाषित है वहां एकदिष्ट वर्धमान है

EXERCISE # 2 (विषयात्मक प्रश्न)

1. r cm त्रिज्या वाले गोले में बनाये जा सकने वाले सबसे बड़े बेलन का आयतन ज्ञात करो।
2. एक टेलीफोन कम्पनी के पास कुल 500 उपभोक्ता हैं तथा कम्पनी प्रत्येक उपभोक्ता से 300 रुपये प्रतिवर्ष की एक नियम राशि वसूल करती है। कम्पनी प्रति उपभोक्ता वार्षिक मूल्य बढ़ाना चाहती है और यह माना जाता है कि 1 रुपये की प्रत्येक वर्षद्धि पर एक उपभोक्ता कम्पनी छोड़ देगा। तो प्रति उपभोक्ता वह राशि ज्ञात कीजिए जिससे कम्पनी की आय अधिकतम होगी।
3. एक फैंक्ट्री D को सड़क द्वारा एक रेलवे लाइन जिस पर एक कस्बा A स्थित है, से जोड़ जाना है। फैंक्ट्री की रेलवे लाइन से दूरी $DB = 5\sqrt{3}$ किलोमीटर है और रेलवे लाइन की लम्बाई AB 20 किलोमीटर है। सड़क पर माल भाड़ा रेलवे की तुलना में दुगुना है। रेलवे लाइन के किस बिन्दु P पर सड़क DP को जोड़ा जाना चाहिए ताकि फैंक्ट्री से कस्बे तक माल की आपूर्ति न्यूनतम कीमत में हो।
4. उस समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष पर बने कोण की कोज्या (cosine) ज्ञात करो जिसका क्षेत्रफल दी गई l लम्बाई वाली माध्यिका के लिये अधिकतम हो जब कि माध्यिका इसकी पार्श्व भुजा (lateral side) पर खींची गई है।
5. वक्र $y = -x^2$ पर खींची गई किसी स्पर्श रेखा के स्पर्श बिन्दु का भुज x_0 इस प्रकार है कि $x_0 \in (0, 1]$ यह स्पर्श रेखा a एवं y अक्षों को क्रमशः बिन्दु A एवं B पर मिलती है। यदि O मूल बिन्दु हो, तो त्रिभुज OAB का न्यूनतम क्षेत्रफल है—
6. $\sqrt{3}$ इकाई त्रिज्या की वृत्ताकार शीट से एक भग काटकर और शेष भाग के कटे हुए किनारों को साथ रखकर एक शंकु बनाया जाता है। शंकु का अधिकतम आयतन है—
7. वर्गाकार आधार तथा 1000 घन फीट क्षमता वाला एक बन्द आयाताकार सन्दूक बनाया जाता है। इसके आधार के लिये प्रयोग की जाने वाली धातु की कीमत 15 पैसे प्रति वर्ग फीट, उपर के लिए 25 पैसे एवं भुजाओं के लिये 20 पैसे प्रति वर्ग फीट खर्च आता है तथा इसे बनाने की मजदूरी 3 रुपये है। तो सन्दूक बनाने में आने वाला खर्च न्यूनतम होने के लिये सन्दूक की विमाएं ज्ञात करो।
8. $f(x) = \arctan x - \frac{1}{2} \ln x$ अंतराल $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3} \right]$ में निरपेक्ष उच्चिष्ठ तथा निरपेक्ष निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए।

9. एक त्रिभुज के परिगत वृत्त के केन्द्र पर त्रिभुज की भुजाएं α, β तथा γ कोण बनाती है। $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)$ तथा $\cos\left(\lambda + \frac{\pi}{2}\right)$ के समान्तर माध्य का न्यूनतम मान है।
10. 'a' त्रिज्या वाले एक वृत्त पर स्थित बिन्दु 'Q' पर खींची गई एक स्पर्श रेखा पर वृत्त पर ही स्थित एक स्थिर बिन्दु 'P' से लम्ब PR खींचा जाता है, तो त्रिभुज PQR का अधिकतम क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
11. मना अटलांटिक महासागर में γ तरंगदैर्घ्य वाली तरंगों को वेग $k\sqrt{\left\{\left(\frac{\lambda}{2}\right) + \left(\frac{a}{\lambda}\right)\right\}}$ है, जहां k तथा a अचर है। प्रदर्शित कीजिए कि तरंगों का न्यूनतम वेग अचर a से स्वतंत्र है।
12. एक त्रिघातीय बहुपत $f(x)$, $x=0$ पर शून्य है, तथा $x = -1$ एवं $x = \frac{1}{3}$ पर सापेक्ष निम्निष्ठ/उच्चिष्ठ रखता है। यदि $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{14}{3}$ हो तो $f(x)$ है

Answers

EXERCISE # 1

1. D 2. A 3. B 4. A 5. A 6. C 7. A
 8. B 9. A 10. B 11. D 12. A 13. A 14. D
 15. C 16. B 17. D 18. BC 19. ACD 20. BC
 21. AC 22. ACD

EXERCISE #2

1. $\frac{4\pi^3}{3\sqrt{3}}$ 2. Rs. 400
 3. 5 km. from B towards A

4. $\cos A = 0.8$ 5. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ 6. $2\pi/3$
 7. side 10', height 10'
 8. Global maximum $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{4} \ln 3$,
 Global minima $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \ln 3$,
 9. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 10. $\frac{3\sqrt{3}}{8} a^2$
 12. $f(x) = a^3 + x^2 - x + 2$