

विध्न विचारत भीरु जन, नहीं आरम्भे काम,
विपति देख छोड़े तुरंत मध्यम मन कर श्याम।
पुरुष सिंह संकल्प कर, सहते विपति अनेक,
'बना' न छोड़े ध्येय को, रघुबर राखे टेक।।

रचित: मानव धर्म प्रणेता

सद्गुरु श्री रणछोड़दासजी महाराज

परिवर्तन की दर, स्पर्शरेखा एवं अभिलम्ब (Rate of change, tangent & normal)

.....
Measure what is measurable, and make measurable what is not so..... Galiloi Galilae
.....

परिवर्तन की दर रूप में अवकलज (Derivative as rate of change):

व्यवहारिक गतिण के कई क्षेत्रों में अनुसंधान का विषय है कि एक चर में परिवर्तन के सापेक्ष दूसरे चर में किसी प्रकार परिवर्तन होता है। सामान्यतः परिवर्तन की दर समय से संबंध है लेकिन हम परिवर्तन की दर को अन्य चर से भी संबद्ध कर सकते हैं।

एक अर्घशास्त्री जान सकता है कि ब्याज दर में परिवर्तन के साथ कैसे निवेश परिवर्तन किया जाये।

एक चिकित्सक जान सकता है कि तरह दवा की खुराक में अल्प परिवर्तन से शरीर परिणाम देता है।

एक भौतिक शास्त्री समय के साथ दूरी परिवर्तन की दर जान सकता है।

इस प्रकार से सभी प्रश्नों की व्याख्या और प्रतिनिधित्व अवकलज के द्वारा संभव है।

परिभाषा (Definition):

फलन $f(x)$ का अंतराल $[a, a+h]$ में x के सापेक्ष औसत परिवर्तन की दर इस प्रकार परिभाषित है $\frac{f(x+h) - f(a)}{h}$

परिभाषा (Definition):

f का x के सापेक्ष तात्क्षणिक परिवर्तन की दर इस प्रकार परिभाषित है $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ जबकि सीमा का असतित्व है।

नोट: तात्क्षणिक शब्द के उपयोग में x समय को प्रदर्शित नहीं कर सकता। हम सामान्यतः शब्द 'दर परिवर्तन', का उपयोग 'तात्क्षणिक दर परिवर्तन' के आश में करते हैं।

स्पर्श रेखा और अभिलम्ब का समीकरण (Equation of Tangent and Normal):

वक्र $y = f(x)$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का ढाल $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_1, y_1)} = f'(x_1)$ होता है। अतः वक्र $y = f(x)$ के किसी बिन्दु

(x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$(Y - Y_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

चूँकि अभिलम्ब स्पर्श रेखा के लम्बवत् रेखा होती है अतः इसका समीकरण बिन्दु (x_1, y_1) पर

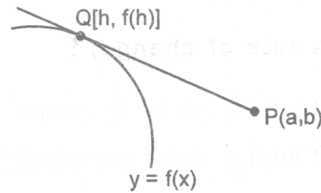
$$(Y - Y_1) = -\frac{1}{F'(X_1)}(X - X_1)$$

यदि $f'(x_1)=0$ हो, तो स्पर्श रेखा $y=y_1$ और अभिलम्ब रेखा $x=x_1$ होगी।

यदि $f'(x_1)$ अनन्त है, तो स्पर्श रेखा $x=x_1$ और अभिलम्ब रेखा $y=y_1$ होगी।

किसी बाह्य बिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखा का समीकरण (Tangent from and External Point):

माना बिन्दु $P(a, b)$ दिया गया है जो कि वक्र $y = f(x)$ पर स्थित नहीं है। तो वक्र $y = f(x)$ पर खींची गई सभी संभव स्पर्श रेखाये जो कि $P(a, b)$ से गुजरती है, स्पर्श बिन्दु Q , को ज्ञात करके निकाली जा सकती है जबकि बिन्दु Q , वक्र $y = f(x)$ पर स्थित है।

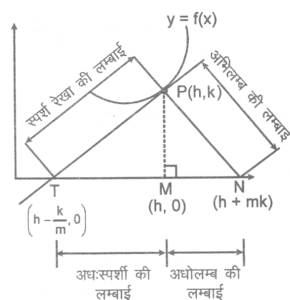


स्पर्श रेखा का समीकरण $y - b = \frac{f(h) - b}{h - a}(x - a)$

स्पर्श रेखा, अभिलम्ब, अधोस्पर्श रेखा और अधोलम्ब की लम्बाई

(Lengths of tangent, normal, sutangent and subnormal):

माना कि वक्र $y = f(x)$ पर कोई बिन्दु $P(h, k)$ है। मानाकि बिन्दु P पर खींची गई स्पर्श रेखा और अभिलम्ब x - अक्ष को क्रमशः T और N बिन्दु पर मिलती है तो लम्बाई PT को स्पर्श रेखा की लम्बाई और लम्बाई PN को अभिलम्ब की लम्बाई कहते हैं।



PT का x - अक्ष पर प्रक्षेप TM , अधः स्पर्शी और PN का x अक्ष पर प्रक्षेप अधोलम्ब कहलाता है।

माना $m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{h,k}$ = स्पर्श रेखा का ढाल

अतः स्पर्श रेखा का समीकरण $m(x-h)=(y-k)$

उपरोक्त में $y=0$ रखने पर स्पर्श रेखा द्वारा x अक्ष पर काटा गया अन्तःखण्ड $x = h - \frac{k}{m}$ होगा।

इसी तरह अभिलम्ब द्वारा x - अक्ष पर काटा गया अन्तः खण्ड $x = h + km$

अब लम्बाई PT, PN आसानी से दूरी सूत्र से ज्ञात की जा सकती है।

(i) $PT = \left| k\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \right| =$ स्पर्श रेखा की लम्बाई

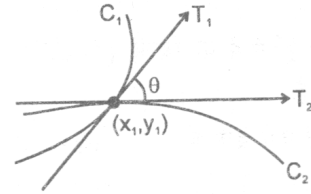
(ii) $PN = \left| k\sqrt{1 + m^2} \right| =$ अभिलम्ब की लम्बाई

(iii) $TM = \left| \frac{k}{m} \right| =$ अधः स्पर्शी की लम्बाई

(iv) $MN = |km| =$ अधोलम्ब की लम्बाई

वक्रों का प्रतिच्छेदन कोण (Angle between the curves):

दो वक्रों के प्रतिच्छेद बिन्दु पर दोनों वक्रों की स्पर्श रेखाओं अथवा अभिलम्बों के बीच का न्यून कोण वक्रों का प्रतिच्छेदन कोण कहलाता है।



$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

जहाँ m_1 एवं m_2 , प्रतिच्छेदन बिन्दु पर स्पर्श रेखाओं के ढाल हैं।

- नोट:**
- (i) दो वक्रों के बीच के कोण को परिभाषित होने के लिए दोनों वक्रों का एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करना आवश्यक है। यह प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात करके निश्चित किया जा सकता है।
 - (ii) यदि दो वक्र एक-दूसरे एक से अधिक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो दोनों वक्रों के बीच का कोण प्रतिच्छेद बिन्दु के सापेक्ष ज्ञात किया जाता है।
 - (iii) दो वक्र समकोणीय कहलाते हैं यदि उनके प्रत्येक प्रतिच्छेद बिन्दु पर प्रतिच्छेदन कोण समकोण हो अर्थात् $m_1 m_2 = -1$.

दो वक्रों के बीच की न्यूनतम दूरी (Shortest distance between two curves):

दो वक्र जो एक दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करते उनके बीच की न्यूनतम दूरी उनके उभयनिष्ठ अभिलम्ब के अनुदिश प्राप्त होती है।

Exercise – 1

.....
1-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ के बिन्दु $(1, \sqrt{3})$ पर खींचे गई स्पर्श रेखा, अभिलम्ब और धनात्मक x- अक्ष से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल है—

- (A) $3\sqrt{3}$ वर्ग इकाई (B) $2\sqrt{3}$ वर्ग इकाई (C) $4\sqrt{3}$ वर्ग इकाई (D) $\sqrt{3}$ वर्ग इकाई
2. वक्र $y = -\sqrt{x} + 2$ के उस अभिलम्ब का समीकरण जो वक्र $y = \tan(\tan^{-1}x)$ के साथ प्रतिच्छेद बिन्दु पर खींचा गया है—
 (A) $2x - y - 1 = 0$ (B) $2x - y + 1 = 0$ (C) $2x + y - 3 = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं
3. वक्र $y - e^{xy} + x = 0$ के जिस बिन्दु पर स्पर्श रेखा उर्ध्वाधर है
 (A) (1, 1) पर (B) (0, 1) पर (C) (1, 0) पर (D) कोई बिन्दु नहीं
4. वक्र $ay^2 = x^3$ के किसी बिन्दु पर खींचा गया अभिलम्ब अक्षों पर बराबर अन्तः खण्ड काटता है, तो उस बिन्दु का भुज है
 (A) $\frac{2a}{9}$ (B) $\frac{4a}{9}$ (C) $-\frac{4a}{9}$ (D) $-\frac{2a}{9}$
5. यदि वक्र $x = a(\theta + \sin \theta), y = a(1 + \cos \theta)$ पर $\theta = \frac{\pi}{3}$ पर खींची गई स्पर्श रेखा x-अक्ष के साथ $\alpha (0 \leq \alpha < \pi)$ कोण बनाती है, तो $\alpha =$
 (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$
6. वक्र $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} = 1$ के किसी स्वेच्छ बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा का x- अन्तः खण्ड समानुपाती होगा—
 (A) स्पर्श बिन्दु के भुज के वर्ग के (B) स्पर्श बिन्दु के भुज के वर्गमूल के
 (C) स्पर्श बिन्दु के भुज के घन के (D) स्पर्श बिन्दु के भुज के घनमूल के
7. यदि वक्र $y = 1 - ax^2$ और $y = x^2$ परस्पर लम्बवत् प्रतिच्छेद करते हैं, तो a का मान है—
 (A) 1/2 (B) 1/3 (C) 2 (D) 3
8. प्रवलय $y^2 = 8x$ पर उस बिन्दु के निर्देशांक जो वृत्त $x^2 + (y + 6)^2 = 1$ से न्यूनतम दूरी पर है—
 (A) (2, -4) (B) (18, -12) (C) (2, 4) (D) इनमें से कोई नहीं
9. वक्र $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$ के बिन्दु (4, 1) पर अधःस्पर्शी की लम्बाई होगी—
 (A) 2 (B) 1/2 (C) 3 (D) 4
10. किसी वक्र के लिए अनुपात $\frac{(\text{अभिलम्ब की लम्बाई})^2}{(\text{स्पर्श रेखा की लम्बाई})^2}$, निम्नलिखित में से किसके बराबर होगा—
 (A) (अधोलम्ब)/(अधःस्पर्शी) के (B) (अधःस्पर्शी)/(अधोलम्ब) के
 (C) (अधोलम्ब)/(अधःस्पर्शी)² के (D) इनमें से कोई नहीं
11. एक उल्टे शंकु में 77 लीटर/मिनट की दर से पानी भरा जाता है जिसके आधार की त्रिज्या 2 m और ऊँचाई 4m है तो जिस क्षण पानी की गहराई 70 सेमी. है उस क्षण पानी के जल के ऊपर उठने की दर होगी (जबकि $\pi = 22/7$)
 (A) 10 सेमी./मिनट (B) 20 सेमी./मिनट (C) 40 सेमी./मिनट (D) इनमें से कोई नहीं

एक से अधिक विकल्प सही

12. यदि वक्र $y = ax^2 + bx + \frac{7}{2}$ के बिन्दु (1,2) पर स्पर्श रेखा वक्र $y = x^2 + 6x + 10$ के बिन्दु (-2, 2) पर अभिलम्ब के समान्तर है,

तो

- (A) $a = 1$ (B) $a = -1$ (C) $b = -5/2$ (D) $b = 5/2$

13. यदि वक्र $2y^3 = ax^2 + x^3$ बिन्दु (a, a) पर खींची गई स्पर्श रेखाएं अक्षों पर क्रमशः α, β अन्तःखण्ड काटती है जहां $\alpha^2 + \beta^2 = 61$ है तो a का मान है—

- (A) 20 (B) 25 (C) 30 (D) -30

14. फलन $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x - 4$ के ग्राफ पर स्थित बिन्दु/बिन्दुओं के निर्देशांक जिन पर खींची गई स्पर्श रेखाओं द्वारा अक्षों पर काटे गये अन्तःखण्ड बराबर तथा विपरीत चिन्ह के है, है—

- (A) $(2, 8/3)$ (B) $(3, 7/2)$ (C) $(1, 5/6)$ (D) इनमें से कोई नहीं

15. परावलय $2y = x^2$ पर स्थित बिन्दु के निर्देशांक जो कि बिन्दु $(0, 3)$ से न्यूनतम दूरी पर है—

- (A) $(2, 2)$ (B) $(-\sqrt{2}, 1)$ (C) $(\sqrt{2}, 1)$ (D) $(-2, 2)$

.....
1-B (विषयात्मक प्रश्न)

- वक्र $y = x^3$ पर स्थित ऐस बिन्दु ज्ञात कीजिए, जिन पर स्पर्श रेखा की प्रवणता संगत बिन्दु के y -निर्देशांक के बराबर होती है।
- वक्र $y = 1 + e^{-2x}$ के उस बिन्दु पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ वक्र सरल रेखा $y = 2$ को काटता है।
- वक्र $x = \tan t, y = \sin 2t + 2 \cos 2t$ के बिन्दु $t = 0$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।
- वक्र $x^3 + y^3 = 6xy$ के बिन्दु $(3, 3)$ पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए।
- वक्र $x^3 + y^3 = 8xy$, वक्र $y^2 = 4x$ को मूल बिन्दु के अलावा जिस बिन्दु पर मिलता है उस बिन्दु पर वक्र के अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए।
- वक्र $y = x^2 - 2x + 7$ की उस स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो

(A) सरल रेखा $2x - y + 9 = 0$ के समान्तर है।
 (B) सरल रेखा $2y - x + 1 = 0$ के लम्बवत् है।
- यदि वक्र $xy = ax + by = 0$ के बिन्दु $(1, 1)$ पर स्पर्श रेखा x -अक्ष के साथ $\tan^{-1} 2$ कोण बनाती है, तो a व b के मान ज्ञात कीजिए।
- प्रदर्शित कीजिए कि वक्र $x^2 - y^2 = a^2$ के किसी बिन्दु P पर खंचा गया अभिलम्ब x अक्ष को जिस बिन्दु पर मिलता है उस बिन्दु की बिन्दु P से दूरी तथा बिन्दु P की मूल बिन्दु से दूरी परस्पर बराबर होगी।

9. सिद्ध कीजिए कि वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ पर खींची गई सभी स्पर्श रेखाओं द्वारा अक्षों के मध्य काटे गये अन्तखण्डों की लम्बाईयां परस्पर समान है।
10. वक्र $y^2 - 2x^2 - 4y + 8 = 0$ पर बिन्दु (1, 2) से खींची गई स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।
11. वक्र $y = 4x^3 - 2x^5$ पर वे बिन्दु ज्ञात कीजिए जिन पर खींची गई स्पर्श रेखाएं मूलबिन्दु से गुजरती है।
12. यदि वक्र $y^2 = x(2-x)^2$ के बिन्दु (1,1) पर खींची गई स्पर्श रेखा वक्र को पुनः बिन्दु P पर मिलती है, तो P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
13. वक्र $y = 2 \sin^2 x$ और वक्र $y = \cos 2x$ के प्रतिच्छेद कोण का मान ज्ञात कीजिए।
14. वक्रों $y^2 = 4ax$ और $x^2 = 32ay$ के प्रतिच्छेद कोण का मान ज्ञात कीजिये।
15. वक्रों $ax^2 + by^2 = 1$ एवं $a'x^2 + b'y^2 = 1$ के परस्पर लम्बकोणीय प्रतिच्छेदन हेतु प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिये।
16. वक्र $x^2 = 4y$ पर स्थित उन बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो कि सरल रेखा $y = x - 4$ से न्यूनतम दूरी पर है।
17. वक्रों $xy = 9$ और $x^2 + y^2 = 1$ के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।
18. अतिपरवलय $3x^2 - 4y^2 = 72$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो कि सरल रेखा $3x + 2y + 1 = 0$ से न्यूनतम दूरी पर है।
19. परवलय $y^2 = 4ax$ के लिए सिद्ध कीजिए कि अधःस्पर्शा और भुज का अनुपात अचर है। इस अनुपात को ज्ञात कीजिए।
20. प्रदर्शित कीजिए कि वक्र $x^2 y^2 = a^2 (a^2 - x^2)$ के किसी बिन्दु पर अधोलम्ब बिन्दु के भुज के घन के व्युत्क्रमानुपाती होता है।
21. एक आयात की लम्बाई x , 3 सेमी/मिनट की दर से कम हो रही है और चौड़ाई y , 2 सेमी/मिनट की दर से बढ़ रही है। यदि $x=10$ सेमी और $y=6$ सेमी है, तो निम्नलिखित में हो रहे परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए। (i) परिमाप और (ii) आयत का क्षेत्रफल।
22. 1.5 मी. लम्बाई का व्यक्ति एक 4.5 मी. ऊँचाई के बिजली के खम्भे से 4 किमी/घण्टा की दर से दूर जाता है
(i) छाया के दूर वाले सिरे के धरातल पर बढ़ने की दर ज्ञात कीजिए।
(ii) उसकी छाया की लम्बाई कितनी तेजी से बढ़ रही है ?
23. यदि दो वर्गों की भुजाएं क्रमशः x और y इस प्रकार है कि $y = x - x^2$ तो द्वितीय वर्ग के क्षेत्रफल में प्रथम वर्ग के क्षेत्रफल के

सापेक्ष परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए। जबकि $x=1$ सेमी. हो।

Exercise -2

2-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

- यदि वक्र $y = \frac{2}{3}x^3 - 2ax^2 + 2x + 5$ के प्रत्येक बिन्दु पर खंची स्पर्श रेखा धनात्मक x - अक्ष के साथ न्यून कोण बनाती है, तो—
 (A) $a \leq 1$ (B) $-1 \leq a \leq 1$ (C) $a \leq -1$ (D) इनमें से कोई नहीं
- $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$, $x \neq 0$ तथा $f(0)=0$ से परिभाषित फलन के ग्राफ पर मूलबिन्दु पर खींचे गये अभिलम्ब का समीकरण है
 (A) $x + y = 0$ (B) $x - y = 0$ (C) $y = 0$ (D) $x = 0$
- रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ वक्र $y = be^{x/a}$ को जिस बिन्दु पर स्पर्श करती है, वह है—
 (A) $(-a, be)$ (B) $(-b, \frac{b}{e})$ (C) $(a, \frac{b}{e})$ (D) $(0, b)$
- वक्र $y^2 = 4a(x + a \sin \frac{x}{a})$ पर स्थित वे सभी बिन्दु जिन पर खींची गई स्पर्श रेखाएं x -अक्ष के समान्तर हैं, स्थित हैं
 (A) वृत्त पर (B) परवलय पर (C) सरल रेखा पर (D) इनमें से कोई नहीं
- एक वक्र दो समीकरणों $x = \sec^2 t$ तथा $y = \cot t$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। जहाँ t एक प्राचल है यदि वक्र पर स्थित बिन्दु P (जहाँ $t = \pi/4$) पर खींची गई स्पर्श रेखा वक्र को पुनः बिन्दु Q पर मिलती है, तो
 (A) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ (C) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (D) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$
- यदि वक्र $y = a^{1-n}x^n$ पर स्थित किसी बिन्दु पर अधोलम्ब की लम्बाई अचर है, तो n का मान है—
 (A) 1 (B) $1/2$ (C) 2 (D) -2
- वक्र $x^3 + pxy^2 = -2$ तथा $3x^2y - y^3 = 2$ लम्बकोणीय है—
 (A) $p = 3$ पर (B) $p = -3$ पर (C) p के किसी मान के लिए नहीं (D) $p = \pm 3$ पर
- यदि वक्र $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ तथा $xy = c^2$ एक दूसरे को समकोण पर काटते हैं, तो—
 (A) $a + b = 0$ (B) $a^2 = b^2$ (C) $a + b = c$ (D) इनमें से कोई नहीं
- एक वक्र $y = ax^4 + bx^3 + cx + d$ की प्रवणता बिन्दु $(0, 1)$ पर शून्य है तथा वक्र बिन्दु $(-1, 0)$ पर x -अक्ष को स्पर्श भी करता है, तो x के किन मानों के लिए वक्र की प्रवणता ऋणात्मक होगी—
 (A) $x > -1$ (B) $x < 1$ (C) $x < -1$ (D) $-1 \leq x \leq 1$

Download FREE Study Package from www.TekoClasses.com & Learn on Video
www.MathsBySuhag.com Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

10. वक्र $y = (a/2)(e^{x/a} + e^{-x/a})$ की कोटि, अभिलम्ब की लम्बाई और एक अन्य राशि का गुणोत्तर माध्य है, तो वह अन्य राशि है—
(A) $a/2$ (B) a (C) e (D) इनमें से कोई नहीं

एक से अधिक विकल्प सही

11. वक्र $f(x) = x^{1/3}$ के सन्दर्भ में –
 (A) बिन्दु (0, 0) पर स्पर्श रेखा का समीकरण $x = 0$ है।
 (B) बिन्दु (0, 0) पर अभिलम्ब का समीकरण $y = 0$ है।
 (C) बिन्दु (0, 0) पर वक्र पर अभिलम्ब अस्तित्व नहीं रखता है।
 (D) $f(x)$ तथा इसका प्रतिलोम ठीक 3 बिन्दुओं पर मिलते हैं।
12. वक्र $y = \cos(x + y) - 2\pi \leq x \leq 2\pi$ की उन स्पर्श रेखाओं के समीकरण जो रेखा $x + 2y = 0$ के समान्तर है, होंगे—
 (A) $x + 2y = \pi/2$ (B) $x + 2y = -3\pi/2$ (C) $x - 2y = \pi/2$ (D) $x - 2y = -3\pi/2$
13. यदि वक्र $y^2 = x^3$ के बिन्दु P पर खींची गई स्पर्श रेखा, वक्र को पुनः बिन्दु Q पर काटे तथा सरल रेखा OP एवं OQ x- अक्ष के साथ क्रमशः α, β कोण बनाये जहाँ 'O' मूलबिन्दु हैं तो $\tan \alpha / \tan \beta$ का मान है—
 (A) -1 (B) -2 (C) 2 (D) $\sqrt{2}$
14. वक्र $t^2 + 3t - 8, y = 2t^2 - 2t - 5$ के बिन्दु (2, -1) पर
 (A) अधः स्पर्शी की लम्बाई 7/6 है। (B) स्पर्श रेखा की प्रवणता = 6/7
 (C) स्पर्श रेखा की लम्बाई = $\sqrt{85}/6$ (D) इनमें से कोई नहीं
15. यदि रेखा $ax + by + c = 0$ वक्र $xy = 2$ पर अभिलम्ब हो, तो—
 (A) $a < 0, b > 0$ (B) $a > 0, b > 0$ (C) $a > 0, b > 0$ (D) $a < 0, b < 0$

2-B (विषयात्मक प्रश्न)

1. सिद्ध कीजिए कि सरल रेखा $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ वक्र $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की स्पर्श रेखा है। यदि $p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha$ है।
2. प्रदर्शित कीजिए कि वक्र $x = a(\cos t + \sin t), y = a(\sin t - t \cos t)$ पर स्थित किसी बिन्दु पर अभिलम्ब मूल बिन्दु से अचर दूरी पर होता है।
3. परवलय $y = x^2 + 4x + 8$ तथा $y = x^2 + 8x + 4$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।
4. वक्र $y = f(x)$ के बिन्दु जिसका भुज $x = a$ हो पर खींची गई स्पर्श रेखा x-अक्ष के साथ $\pi/3$ कोण बनाती है तथा बिन्दु, जिसका भुज $x = b$ हो पर खींची गई स्पर्श रेखा, x अक्ष के साथ $\pi/4$ कोण बनाती है तो समाकलन $\int_a^b f'(x) \cdot f''(x) dx$ का मान ज्ञात कीजिए। [जबकि $f''(x)$ सतत् हो]
5. वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा निर्देश अक्षों को बिन्दु P तथा Q पर मिलती हो, तो PQ के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।
6. 50 फीट ऊँचाई वाले खम्भे के शिखर से प्रकाश की एक किरण निकलती है तथा प्रकाश स्तम्भ से 30 फीट की दूरी पर समान

Download FREE Study Package from www.TekoClasses.com & Learn on Video
www.MathsBySuhag.com Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

ऊँचाई से एक गेंद गिराई जाती है। तब $1/2$ सैकण्ड बाद समतल पर गेंद की परछाई कितनी तेजी से गति करेगी।
[यह मानते हुए कि t सैकण्ड में गेंद $s = 16t^2$ फीट की दूरी तय करती है।]

7. वक्र $xy=(c+x)^2$ पर स्थित उस बिन्दु का भुज ज्ञात कीजिए जिस पर खींचा गया अभिलम्ब अक्षों परसंख्यात्मक रूप से समान अन्तःखण्ड काटता है।
8. वक्र $xy = (c + x)^2$ के लिये सिद्ध कीजिए कि इसकी किसी स्पर्श रेखा का निर्देशी अक्षों के बीच का भाग इसके स्पर्श बिन्दु पर दो खण्डों में इस प्रकार विभाजित हो जाता है कि विभाजित भाग स्थिर अनुपात में रहते हैं। (सभी अक्ष धनात्मक हैं।)
9. वक्र $y = x - x^3$ के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा वक्र को पुनः बिन्दु Q पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि PQ को त्रिविभाजित करने वाले बिन्दुओं में से एक बिन्दु y- अक्ष पर स्थित है। त्रिविभाजित करने वाले दूसरे बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।
10. एक पानी की टंकी की आकृति समवृत्तीय शंकु के समान है जिसका शीर्ष नीचे की तरफ है। इसकी ऊँचाई 10 सेमी तथा आधार की त्रिज्या 15 सेमी है। टंकी के तल से पानी 1 सेमी³/सैकण्ड की अक्षर दर से निकल रहा है। जबकि c घन सेमी/सैकण्ड की दर से इसी टंकी के अन्दर पानी उँडेला भी जा रहा है। यदि किसी क्षण, पानी 2 सेमी गहरा है, तथा उस क्षण पानी का तल 4 सेमी./सैकण्ड की दर से बढ़ रहा है तो c का मान ज्ञात करो।
11. xy समतल में एक चर त्रिभुज ABC है जिसका लम्ब केन्द्र शीर्ष B पर है जबकि नियत शीर्ष A, मूल बिन्दु पर स्थित है तथा तीसरा शीर्ष 'C' सदैव परवलय $y = 1 + \frac{7x^2}{36}$ पर स्थित रहता है। समय $t = 0$ पर बिन्दु B, बिन्दु (0, 1) से धनात्मक y-अक्ष पर 2 सेमी./से. के वेग से ऊपर की ओर चलना प्रारम्भ करता है। तो बताओं किसी क्षण $t = \frac{7}{2}$ सैकण्ड पर त्रिभुज का क्षेत्रफल कितनी तेजी से बढ़ रहा है।
12. परवलय $y = -a^2x^2 + 5ax - 4$ की कोई जीवा वक्र $y = \frac{1}{1-x}$ को $x = 2$ पर स्पर्श करती हैं तथा इस बिन्दु के द्वारा समद्विभाजित होती हैं तो 'a' का मान ज्ञात कीजिए।
13. p के मानों का समुच्चय ज्ञात कीजिए जिसके लिए समीकरण $|\ln x| - px = 0$ के तीन भिन्न मूल विद्यमान हैं।
14. यदि किसी त्रिभुज ABC में भुजा 'c' तथा कोण C अक्षर रहें जबकि शेष अवयवों में अतिसूक्ष्म परिवर्तन हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{da}{\cos A} + \frac{db}{\cos B} = 0$.

Exercise - 3

3-A (स्तम्भ मिलान)

- | 1. स्तम्भ – I | स्तम्भ – II |
|---|--|
| (A) वक्र $y = 2x^4$ के बिन्दु $x = \frac{1}{2}$ पर स्पर्श रेखा का झुकाव होगा— | (p) $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ |
| (B) वक्र के अभिलम्ब का झुकाव जहाँ स्पर्श रेखा बिन्दु (3, 0) तथा (4, 1) को मिलान वाली रेखा के समान्तर है। | (q) $\frac{3\pi}{4}$ |
| (C) वक्र $x = 1 - \cos \theta, y = \theta - \sin \theta$ के बिन्दु $\theta = \frac{\pi}{4}$ पर स्पर्श रेखा का झुकाव होगा— | (r) $\frac{\pi}{4}$ |
| (D) वक्र $y = [\sin x + \cos x]$ तथा $x^2 + y^2 = 5$ का प्रतिच्छेद कोण, | (s) $\frac{\pi}{8}$ |

Download FREE Study Package from www.TekoClasses.com & Learn on Video
www.MathsBySuhag.com Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन है—

2. माना वक्र $x = a \cos t, y = -a \sin t$ है। माना $t = -\frac{\pi}{4}$ के संगत बिन्दु P है।

स्तम्भ - I

- (A) P पर स्पर्श रेखा की लम्बाई
 (B) P पर अभिलम्ब की लम्बाई
 (C) P पर अद्योःस्पर्श रेखा की लम्बाई
 (D) P पर अद्योःलम्ब की लम्बाई

स्तम्भ - II

- (p) $\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2}$
 (q) $\frac{a}{\sqrt{2}}$
 (r) $\frac{b^2}{a\sqrt{2}}$
 (s) $\frac{b}{a\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2}$

3-B (कथन/कारण)

3. कथन -1: वक्र $4x^3 = 27y^2$ की स्पर्श रेखा है, जो अभिलम्ब भी है।

कथन-2: सामान्यतः वक्र की एक स्पर्श रेखा वक्र की अभिलम्ब भी हो सकती है।

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है, कथन-2 कथन-1 की सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है, कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

4. कथन-1: वक्र $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ और $\frac{x^2}{1+a^2} + \frac{y^2}{1-b^2} = 1, b \in (-1, 1)$ के लिए लम्बवत् है।

कथन -2: $ax^2 + by^2 = 1$ और $Ax^2 + By^2 = 1$ लम्बवत् है, यदि और केवल यदि $ab(A-B) = AB(a-b)$.

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है, कथन-2 कथन-1 की सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है, कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

5. कथन-1: बिन्दु $(0, y_0)$ की वक्र $y = x^2$ से न्यूनतम दूरी y_0 है, यदि $0 \leq y_0 \leq \frac{1}{2}$.

कथन-2: इसी फलन के लिए उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ समीकरण $f'(x)=0$ के सदैव मूल है।

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है, कथन-2 कथन-1 की सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है, कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।

Download FREE Study Package from www.TekoClasses.com & Learn on Video
www.MathsBySuhag.com Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

(D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

3-C (अनुच्छेद)

6. अनुच्छेद

माना $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. माना $y = f(x)$ पर स्पर्श रेखा का ढाल m , x -अन्तःखण्ड a और y - अन्तःखण्ड b है, तो

6.1 स्पर्श रेखा के स्पर्शी बिन्दु का भुज जिसके लिए m महत्तम है—

- (A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) 1 (C) -1 (D) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

6.2 b का अधिकतम मान है—

- (A) $\frac{9}{8}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{5}{8}$

6.3 स्पर्श रेखा के स्पर्शी बिन्दु का भुज जिसके लिए $\frac{1}{a}$ महत्तम है—

- (A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) 1 (C) -1 (D) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

7. अनुच्छेद

t का एक फलन $a(t)$ इस प्रकार है कि t के सभी मानों के लिए $\frac{da}{dt} = 2$ और जब $t = 0$ हो, तो $a = 0$ पुनः $y = m(t) a + c(t)$ वक्र $y = x^2 - 2ax + a^2 + a$ के उस बिन्दु पर स्पर्श रेखा है जिसका भुज 0 है। तो

7.1 यदि शीर्ष की मूलबिन्दु से दूरी में t के सापेक्ष परिवर्तन की दर k है, तो $k =$

- (A) 2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$

7.2 यदि $t = k$ पर t के सापेक्ष $c(t)$ में परिवर्तन की दर ℓ है तो $\ell =$

- (A) $16\sqrt{2} - 2$ (B) $8\sqrt{2} + 2$ (C) $10\sqrt{2} + 2$ (D) $16\sqrt{2} + 2$

7.3 $t = \ell$ पर t के सापेक्ष $m(t)$ में परिवर्तन की दर है—

- (A) -2 (B) 2 (C) -4 (D) 4

3-D (सत्य/असत्य कथन)

8. यदि वक्र $y = x - x^3$ के बिन्दु $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$ पर खींची गई स्पर्श रेखा वक्र को पुनः बिन्दु Q पर मिलती है, तो PQ के मध्य बिन्दु के निर्देशांक $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{16}\right)$ है।
9. $y = \sin x + \cos x$ के बिन्दु $x = \frac{\pi}{2}$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण $x + y = 1 - \frac{\pi}{2}$
10. वक्र $y^2 = 4ax$ और $y = e^{\frac{x}{2a}}$ लम्बवत् वक्र है।
11. $n = -2$ के लिए वक्र $xy^n = a^{n+1}$ के किसी बिन्दु पर अद्योलम्ब अक्ष है।
12. यदि $px + qy = 1$ परवलय $y^2 = 4ax$ का अभिलम्ब है, तो $ap^3 + 2apq^2 = q^2$

3-E (रिक्त स्थान की पूर्ति)

13. वक्र $y = \sqrt{x}$ को $\frac{\pi}{4}$ कोण पर प्रतच्छेद करने वाली x- अक्ष के समान्तर सरल रेखा का समीकरण ----- है।
14. वक्र $x = t^2 + 3t - 8, y = 2t^2 - 2t - 5$ के बिन्दु $(2, -1)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ----- है।
15. यदि परवलय $y^2 = 8x$ पर खींची गई स्पर्श रेखा सरल रेखा $y = 3x + 5$ के साथ $\frac{\pi}{4}$ का कोण बनाती है, तो स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक ----- तथा ----- है।
16. एक पतंग 300m की ऊँचाई पर है जिसके धागे की लम्बाई 500 m है यदि हवा पतंग को क्षैतिजतः 5 km/hr की दर से उस व्यक्ति से जो उसे उड़ा रहा है, दूर ले जाती है, तब ----- की दर से धारा फिरकी से निकलता है।
17. वक्र $ay^2 = x^3$ के बिन्दु $P(at^2, at^3)$ पर स्पर्श रेखा वक्र को पुनः Q पर मिलती है, तब बिन्दु Q के निर्देशांक ----- है।

Exercise -4

4-A (पूर्ववर्ती JEE परीक्षा प्रश्न)

IIT-JEE-2007

1. वक्र $y = e^x$ के बिन्दु (e, e^e) पर खींची गई स्पर्श रेखा, बिन्दुओं $(c-1, e^{c+1})$ तथा $(c+1, e^{c+1})$ को मिलाने वाली सरल रेखा को प्रतिच्छेद करती है—
 (A) $x = c$ के बायीं ओर (B) $x = c$ के दायीं ओर
 (C) किसी भी बिन्दु पर नहीं (D) सभी बिन्दुओं पर
2. **अनुच्छेद**
 यदि वास्तविक रेखा R पर परिभाषित एक सतत सफलन f , R में धनात्मक और ऋणात्मक मान ग्रहण करता है तो समीकरण $f(x) = 0$, R में एक मूल रखता है। उदाहरणार्थ, यदि यह ज्ञात है कि R पर परिभाषित एक सतत फलन f किसी बिन्दु पर धनात्मक है तथा इसका न्यूनतम मान ऋणात्मक है, तो समीकरण $f(x) = 0$, R में एक मूल रखता है। माना कि x के सभी वास्तविक मानों के लिये $f(x) = ke^x - x$ है जहाँ k एक वास्तविक अचर संख्या है।
 - 2.1 रेखा $y = x$ वक्र $y = ke^x$ को $k \leq 0$ के लिये मिलती है—
 (A) किसी बिन्दु पर नहीं (B) एक बिन्दु पर (C) दो बिन्दुओं पर (D) दो से अधिक बिन्दुओं पर
 - 2.2 k का वह धनात्मक मान जिसके लिये $ke^x - x = 0$ का केवल एक मूल विद्यमान होता है—
 (A) $\frac{1}{e}$ (B) 1 (C) e (D) $\log_e 2$
 - 2.3 $k > 0$ के लिये k के उन सभी मानों का समुच्चय जिसके लिये $ke^x - x = 0$ के दो भिन्न मूल विद्यमान होंगे—
 (A) $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ (B) $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ (C) $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$ (D) $(0, 1)$

IIT-JEE-2005

3. यदि $|f(x_1) - f(x_2)| < (x_1 - x_2)^2 \forall x_1, x_2 \in R$ हो, तो वक्र $y = f(x)$ के बिन्दु $(1, 2)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

IIT-JEE-2003

4. एक उल्टा किया शंकु जिसकी ऊँचाई H तथा त्रिज्या R है तल पर स्थित है। यदि यह शंकु पूर्ण रूप से किसी वाष्पीकृत तरल पदार्थ से भरा हुआ है और वाष्पीकरण की दर जल से पृष्ठीय क्षेत्रफल जो कि हवा के सीधे सम्पर्क में है के समानुपाती हों। (समानुपातिक स्थिरांक $k > 0$) तब ज्ञात कीजिए कि सारा तरल पदार्थ कितने समय में वाष्पीकृत हो जायेगा।

IIT-JEE-2002

5. वक्र $y^3 + 3x^2 = 12y$ पर स्थित वह बिन्दु जहाँ स्पर्श (रेखायें) ऊर्ध्वाधर है—

(A) $\left(\pm \frac{4\sqrt{3}, -2}{3}\right)$ (B) $\left(\pm \frac{\sqrt{11}}{3}, 1\right)$ (C) (0, 0) (D) $\left(\pm \frac{4}{\sqrt{3}}, 2\right)$

IIT-JEE-2001

6. वक्र $f(x) = x^2 + bx - b$ के बिन्दु (1, 1) पर खींची स्पर्श रेखा तथा प्रथम चतुर्थांश के निर्देशी अक्षों से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 2 है, तो b का मान है—
 (A) -1 (B) 3 (C) -3 (D) 1

IIT-JEE-2000

7. यदि वक्र $y = f(x)$ के बिन्दु (3, 4) पर खींचा गया अभिलम्ब धनात्मक x- अक्ष के साथ $3\pi/4$ कोण बनाता है, तो $f'(3) =$
 (A) -1 (B) $-\frac{3}{4}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) 1
8. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $x = 3t^2, y = 2t^3$ के एक बिन्दु पर स्पर्श रेखा तथा अन्य बिन्दु पर अभिलम्ब है।

IIT-JEE-1998

9. एक वक्र c की यह विशेषता है कि यदि उस पर स्थित किसी बिन्दु P पर खींची गई स्पर्श रेखा निर्देशी अक्षों को क्रमशः बिन्दु A तथा B पर काटती हैं तो बिन्दु P, AB का मध्य बिन्दु होता है। वक्र बिन्दु (1, 1) से गुजरता है। वक्र का समीकरण ज्ञात करो।
10. वक्रों $y = |x^2 - 1|$ एवं $y = |x^2 - 3|$ के मध्य उनके प्रतिच्छेद बिन्दु पर न्यून कोण ज्ञात कीजिए।

IIT-JEE-1995

11. वक्र $y = f(x)$ के बिन्दु $[x, f(x)]$ से स्पर्श रेखा की प्रवणता $2x + 1$ है। यदि वक्र (1, 2) के गुजरता है, तब वक्र x अक्ष और रेखा $x = 1$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है—
 (A) $\frac{5}{6}$ (B) $\frac{6}{5}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) 6

IIT-JEE-1994

12. यदि वक्र $y = ax^3 + bx^2 + cx^2 + 5x$ अक्ष को (-2, 0) पर स्पर्श करता है और y- अक्ष को Q पर प्रतिच्छेद करता है, जहाँ इसकी प्रवणता 3 है, तब a,b,c ज्ञात कीजिए।

.....
4-B (पूर्ववर्ती AIEEE/DCE परीक्षा प्रश्न)

13. वक्र $y = x^2 - 5x + 6$ के बिन्दु (2, 0) तथा (3, 0) पर स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण है—
 (A) $\pi/2$ (B) $\pi/6$ (C) $\pi/4$ (D) $\pi/3$
14. वक्र $x = a(\cos \theta + \theta \sin \theta), y = (\sin \theta - \theta \cos \theta)$ के किसी बिन्दु θ पर अभिलम्ब इस प्रकार है कि—
 (A) यह मूल बिन्दु से अचर दूरी पर है। (B) यह $(a\pi/2, -a)$ गुजरता है।

(C) यह x अक्ष से $\pi/2 + \theta$ कोण बनाता है।

(D) यह मूलबिन्दु से गुजरता है।

Answers

EXERCISE # 1-A

1. B 2. A 3. C 4. B 5. D 6. C 7. B

8. A 9. A 10. A 11. B 12. AC 13. CD

14. AB 15. AD

EXERCISE # 1-B

1. (0, 0); (3, 27) 2. $2x + y = 2$ 3. $y = 2x + 2$

4. Tangent : $x + y = 6$, Normal $x - y = 0$

5. $y = x$ 6. (a) $y - 2x - 3 = 0$ (b) $2x + y - 7 = 0$

7. $a = 1, b = -2$ 10. $2x + y = 4, y = 2x$

11. (0, 0), (1, 2), (-1, -2) 12. (9/4, 3/8)

13. $\frac{\pi}{3}$ 14. $\frac{\pi}{2}, \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ 15. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'}$

16. (2, 1) 17. $3\sqrt{2} - 1$ 18. (-6, 3)

19. 2 : 1

21. (i) -2 cm/min (ii) 2 cm²/min.

22. (i) 6 km/h (ii) 2 km/hr

23. zero

EXERCISE # 2-A

1. B 2. A 3. D 4. B 5. D 6. B 7. B

8. B 9. C 10. B 11. ABD 12. AB 13. B

14. ABC 15. AB

EXERCISE # 2-B

3. $y = 8x + 4$; start $y = mx + c$; point of contact (2, 20) & (0, 4)

4. -1 5. $4(x^2 + y^2) = a^2$ 6. -1500 ft/sec

7. $\pm \frac{c}{\sqrt{2}}$ 9. $y = x - 5x^3$

10. $1 + 36\pi$ cu.cm/sec 11. $\frac{66}{7}$ cm²/sec

12. $a = 1$ 13. $p \in (0, 1/e)$

EXERCISE # 3

1. (A) → (r), (B) → (q), (C) → (s), (D) → (p)

2. (A) → (p), (B) → (s), (C) → (q), (D) → (r)

3. B 4. A 5. C 6.1 D 6.2 A 6.3 A 7.1 B

7.2 D 7.3 C 8. True 9. False 10. True

11. True 12. True 13. $y = 1/2$ 14. 6/7

15. (8, 8), $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ 16. 4 km/hr

17. $\left(\frac{at^2}{4}, \frac{at^3}{8}\right)$

EXERCISE # 4

1. A 2.1 B 2.2 A 2.3 A 3. $Y = 24. t = \frac{H}{k}$

5. D 6. C 7. D

8. $\sqrt{2}x + y - 2\sqrt{2} = 0$ or $\sqrt{2}x - y - 2\sqrt{2} = 0$

9. $xy = 1$ 10. $\theta = \tan^{-1} \left| \frac{4\sqrt{2}}{7} \right|$ 11. A 13. A 14. AC

MQB

EXERCISE # 1 (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. एक बेलनाकार पात्र में 1 मी³/मिनट की दर से पानी भरा जाता है। यदि पात्र के वृत्ताकार आधार की त्रिज्या 3 m हो तो पात्र में पानी के तल के ऊपर की ओर बढ़ने की दर होगी—
 (A) $1/9\pi$ मी/मि. (B) 9π मी/मि. (C) $1/3\pi$ मी/मि. (D) 3π मी/मि.
2. वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ पर स्थित ऐसे बिन्दुओं की संख्या जिन पर खींची गई स्पर्श रेखाएं x-अक्ष के समान्तर है, होगी—
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) इनमें से कोई नहीं
3. यदि एक वक्र के किसी बिन्दु पर अधःस्पर्शी और अधोलम्ब की लम्बाईयां बराबर है, तो स्पर्श रेखा की लम्बाई निम्न में से क्या होगी—
 (A) कोटि (B) $\sqrt{2}$ कोटि (C) $\sqrt{2}$ (कोटि) (D) इनमें से कोई नहीं
4. वक्र $x = a(\theta + \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$ के लिए $\theta = \frac{\pi}{2}$ पर अभिलम्ब की लम्बाई है—
 (A) $2a$ (B) $a\sqrt{2}$ (C) $a/2$ (D) $a/\sqrt{2}$
5. c के उन मानों की संख्या जिनके लिये सरल रेखा $3x + 4y = c$ वक्र $\frac{x^2}{2} = x + y$ को स्पर्श करती है—
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4
6. किसी निश्चित क्षेत्र में दो नदियों के किनारे, क्रमशः परवलय $y = x^2$ एवं सरल रेखा $y = x - 2$ से प्रदर्शित किये जाते हैं। यदि इन नदियों को एक सीधी नहर (canal) द्वारा जोड़ा जाये तो न्यूनतम लम्बाई वाली नहर (canal) के अन्तबिन्दु होंगे
 (A) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ and $\left(-\frac{11}{8}, \frac{5}{8}\right)$ (B) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ and $\left(\frac{11}{8}, -\frac{5}{8}\right)$ (C) (0, 0) & (1, -1) (D) इनमें से कोई नहीं
7. वक्र $xy = 1 - y$ वक्र $x^2y = 1 - y$ को जिन बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है उन बिन्दुओं पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु/बिन्दुओं के निर्देशांक है—
 (A) (0, -1) (B) (0, 1) (C) (1, 1) (D) इनमें से कोई नहीं
8. सरल रेखाएं $y = -\frac{3}{2}x$ एवं $y = -\frac{2}{5}x$ वक्र $3x^2 + 4xy + 5y^2 - 4 = 0$ को क्रमशः बिन्दु P एवं Q पर प्रतिच्छेद करती है। तो बिन्दुओं P एवं Q पर खींची गई स्पर्श रेखाएं—
 (A) परस्पर 45° कोण प्रतिच्छेद करती है। (B) परस्पर समान्तर है।
 (C) परस्पर लम्बवत् है। (D) इनमें से कोई नहीं

9. यदि वक्र $x^n y = a^n$ पर किसी स्पर्श रेखा और अक्षों द्वारा बनाये गये त्रिभुज का क्षेत्रफल अचर हो, तो n का मान होगा—
 (A) 1 (B) 2 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$
10. बिन्दु $(0, 0)$ पर वक्र $y^2 = x^3 + x^2$
 (A) X- अक्ष को स्पर्श करता है। (B) अक्षों के मध्य कोण को समद्विभाजित करता है।
 (C) OX के साथ 60° का कोण बनाता है। (D) इनमें से कोई नहीं
11. वक्र $x = t^2 - 1, y = t^2 - t$ के लिये स्पर्श रेखा X-अक्ष के लम्बवत् होगी जबकि
 (A) $t = 0$ (B) $t = \infty$ (C) $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

एक से अधिक विकल्प सही

12. यदि वक्र $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ और $y^3 = 16x$ परस्पर समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो a का/के मान है—
 (A) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (B) 2 (C) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ (D) सम्भव नहीं है।
13. वक्र $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ ($n \in \mathbb{N}$) के उस बिन्दु पर जहाँ भुज 'a' के बराबर है, अभिलम्ब का समीकरण हो सकता है—
 (A) $ax + by = a^2 - b^2$ (B) $ax + by = a^2 + b^2$
 (C) $ax - by = a^2 - b^2$ (D) $bx - ay = a^2 - b^2$
14. माना परवलय $y = a^2 + ax + b$ और $y = x(c-x)$ परस्पर बिन्दु $(1, 0)$ पर स्पर्श करते हैं, तो—
 (A) $a = -3$ (B) $b = 1$ (C) $c = 2$ (D) $b + c = 3$
15. यदि कोई वक्र प्राचलिक समीकरण $x = 2 \ln \cot t + 1$ और $y = \tan t + \cot t$ से प्रदर्शित हो, तो
 (A) उस पर $t = \pi/4$ पर खींची गयी स्पर्श रेखा X- अक्ष के समान्तर होगी
 (B) $t = \pi/4$ पर खींचा गया अभिलम्ब Y- अक्ष के समान्तर होगा।
 (C) $t = \pi/4$ पर खींची गई स्पर्श रेखा $y = x$ के समान्तर होगी।
 (D) स्पर्श रेखा और अभिलम्ब परस्पर बिन्दु $(2, 1)$ पर प्रतिच्छेद करते हैं।
16. वक्र $y = Ke^{Kx}$, Y-अक्ष को जिस कोण पर प्रतिच्छेद करता है—
 (A) $\tan^{-1} k^2$ पर (B) $\cot^{-1}(k^2)$ पर (C) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+k^4}}\right)$ पर (D) $\sec^{-1}\left(\sqrt{1+k^4}\right)$ पर
17. निम्नलिखित वक्र युग्मों में से कौनसे परस्पर लम्बकोणीय हैं—
 (A) $y^2 = 4ax; y = e^{-x/2a}$ (B) $y^2 = 4ax; x^2 = 4ay$ (C) $xy = a^2; x^2 = b^2$ (D) $y = ax; x^2 + y^2 = c^2$
18. सरल रेखा $y = x$ किसी $y = f(x)$ समीकरण वाले परवलय को उस बिन्दु पर स्पर्श करती है जहाँ $x = 1$ है, तब—
 (A) $f'(1) = 1$ (B) $f'(0) = f(1)$

(B) $2f(0) = 1 - f'(0)$

(D) $f(0) + f'(0) + f''(0) = 1$

EXERCISE # 2 (विषयात्मक प्रश्न)

- $(x_1 - x_2)^2 + \left(\sqrt{2 - x_1^2} - \frac{9}{x_2}\right)^2$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिये जबकि $x_1 \in (0, \sqrt{2})$ और $x_2 \in \mathbb{R}^+$
- वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = c^{2/3}$ और $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के परस्पर स्पर्श करने के लिये प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिये जबकि $c = a + b$
- एक सरल रेखा मूल बिन्दु से गुजरती है और वक्र $\frac{x + \sqrt{a^2 - y^2}}{a} = \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right)$ के किसी स्वेच्छ बिन्दु M पर खींची गई स्पर्श रेखा रेखा के समान्तर है, तो प्रदर्शित करो कि इस सरल रेखा एवं बिन्दु M से गुजरने वाली x-अक्ष के समान्तर एक अन्य सरल रेखा के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ $x^2 + y^2 = a^2$ होगा।
- a के उन सभी सम्भावित मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिये असमिका $3 - x^2 > |x - x|$ का कम से कम एक हल ऋणात्मक हो
- यदि वक्र $by^2 = (x + a)^3$ के किसी बिन्दु S पर अधोलम्ब SN एवं अधःस्पर्शी ST परस्पर $p(SN) = q(ST)^2$ द्वारा सम्बन्धित हो, तो $\frac{p}{q}$ का मान b और a के पदों में ज्ञात कीजिए।
- प्रदर्शित कीजिए कि वक्र $x = a\left(\cos t = \log \tan \frac{1}{2} t\right)$, $y = a \sin t$ पर खींची गई किसी स्पर्श रेखा के स्पर्श बिन्दु और x-अक्ष के मध्य स्थित भाग की लम्बाई अचर रहती है।
- एक कण वक्र $6y = x^3 + 2$ के अनुदिश गतिशील है। वक्र पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर y निर्देशांक x निर्देशांक की तुलना में 8 गुना तेजी से बदल रहा है।

Answers

EXERCISE # 1

1. A 2. B 3. B 4. B 5. B 6. B 7. B
 8. C 9. A 10. B 11. A 12. AC 13. AC
 14. AD 15. AB 16. BC 17. ACD 18. AC

EXERCISE # 2

1. 8 4. $A \in \left(-\frac{13}{4}, 3\right)$ 5. $\frac{8B}{27}$
 7. (4,11) & (-4, -31/3)

**for 39 Yrs. Que. of IIT-JEE
 &
 15 Yrs. Que. of AIEEE
 we have distributed already a book**