

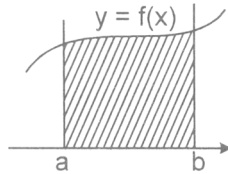
विध्न विचारत भीरु जन, नहीं आरम्भे काम,
 विपति देख छोड़े तुरंत मध्यम मन कर श्याम।
 पुरुष सिंह संकल्प कर, सहते विपति अनेक,
 'बना' न छोड़े ध्येय को, रघुबर राखे टेक।।

रचित: मानव धर्म प्रणेता
 सद्गुरु श्री रणछोड़दासजी महाराज

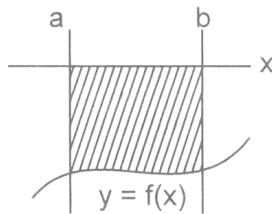
वक्रों के बीच का क्षेत्रफल (Area under curve)

वक्र $y = f(x)$, x -अक्ष एवं कोटियों $x = a$, $x = b$ से परिबद्ध क्षेत्रफल

- (a) यदि $x \in [a, b]$ के लिए $f(x) \geq 0$ हो, तब वक्र $y = f(x)$, x -अक्ष $x = a$ तथा $x = b$ के धिरे क्षेत्र का $\int_a^b f(x) dx$ है।



- (b) $x \in [a, b]$ के लिए यदि $f(x) \leq 0$ हो, तब वक्र $y = f(x)$, x -अक्ष $x = a$ तथा $x = b$ से घिरे का क्षेत्रफल $-\int_a^b f(x) dx$ है।

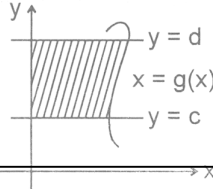


- (c) यदि $x \in [a, c]$ के लिए $f(x) \geq 0$ तथा $x \in [c, b]$ के लिए $f(x) \leq 0$ जबकि $(a < c < b)$ हो तो वक्र $y = f(x)$ तथा x -अक्ष कोटियों $x = a$ और $x = b$ के बीच का क्षेत्रफल $\int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$ है।

वक्र $x = g(y)$, y - एवं भुजों $y = c$, $y = d$ से परिबद्ध क्षेत्रफल

(a) यदि $y \in [c, d]$ के लिए $g(y) \geq 0$ हो, तब वक्र $x = g(y)$ तथा y - अक्ष और भुज $y = c$ तथा $y = d$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल $\int_{y=c}^d g(y) dy$ है।

(b) $y \in [c, d]$ के लिये यदि $g(y) \leq 0$ तब वक्र $x = g(y)$ तथा y - अक्ष और भुज $y = c$ एवं $y = d$ से परिबद्ध क्षेत्रफल $\int_{y=c}^d |g(y)| dy$ है।



नोट: वक्र $x = g(y)$ एवं y - अक्ष तथा भुज तब बद्ध क्षेत्रफल $\int_{y=c}^d |g(y)| dy$ होता है

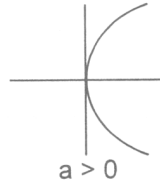
क्षेत्रफलन (Curve tracing)

वक्र की अतिसमान आकृति ज्ञान करने के लिए निम्नलिखित प्रणाली निम्न क्रम में ग्रहण की जाती है।

(a) सममितता (symmetry):

(i) x - अक्ष के सापेक्ष सममित :

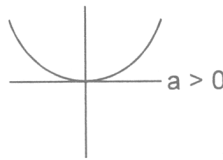
यदि समीकरण में y की सभी घाते सम हो, तो वक्र x - अक्ष के सापेक्ष सममित होता है।



$$Y^2 = 4 a x.$$

(ii) y - अक्ष के सापेक्ष सममित :

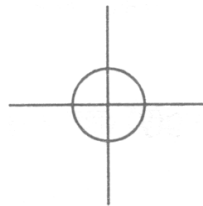
यदि समीकरण में ' x ' की घाते सम हो, तो वक्र y - अक्ष के सापेक्ष सममित होता है।



$$x^2 = 4 a y.$$

(iii) दोनों अक्षों के सापेक्ष सममित :

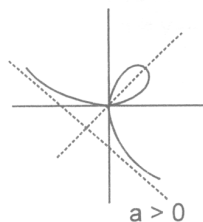
यदि समीकरण में ' x ' तथा ' y ' की सभी घाते सम हो, तो वक्र x तथा y दोनों अक्षों के सापेक्ष सममित होता है।



$$x^2 + y^2 = a^2$$

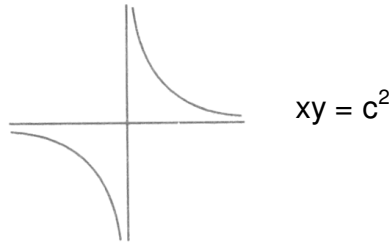
(iv) रेखा $y = x$ के सापेक्ष सममित :

यदि वक्र के समीकरण में x तथा y को आपस में बदलने पर समीकरण अपरिवर्तित रहती हो, तो वक्र रेखा $y = x$ के सापेक्ष सममित होता है।



$$X^3 + y^3 = 3 a x y.$$

- (v) सम्मुख चतुर्थांश में सममित :
 यदि x तथा y के स्थान पर क्रमशः $-x$ तथा $-y$ रखने पर वक्र का समीकरण परिवर्तित नहीं हो, तो वह सम्मुख चतुर्थांश में सममितता होगा ।

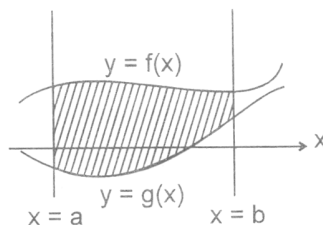


- (a) उन बिन्दुओं को ज्ञान कीजिए जहां वक्र $x -$ अक्ष तथा $y -$ अक्ष को कोटता है ।
- (b) $\frac{dy}{dx}$ ज्ञान कीजिए तथा वक्र पर उन बिन्दुओं जहाँ वक्र की क्षैतिज स्पर्श रेखाएँ स्थित हो, ज्ञात करने के लिए इसकी शून्य से तुलना कीजिए ।
- (c) यदि संभव हो, तो $f(x)$ वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें वृद्धिमान या ह्रासमान हो ।
- (d) जब $x \rightarrow \infty$ या $x \rightarrow -\infty$ हो, तब y के बारे में परीक्षण कीजिए ।
- (e) अनन्त स्पर्शियाँ (Asymptotes):
 अनन्त स्पर्शी वो रेखाएँ हैं जिनकी वक्र से दूसरी शून्य की ओर इस प्रकार अग्रसर होती है। जैसे-जैसे वक्र पर स्थित बिन्दु वक्र के अनुदिश अनन्त की ओर अग्रसर होता है ।
- (i) यदि $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ या $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ हो, तब $x = a, y = f(x)$ का अनन्त स्पर्शी है ।
- (ii) यदि $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$ या $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$ हो तब $y = k, y = f(x)$ का अनन्त स्पर्शी है ।
- (iii) यदि $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = m_1$, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - m_1 x) = c$ हो तब $y = m_1 x + c$ एक अनन्त स्पर्शी है। (दाँयी ओर झुका हुआ)
- (iv) यदि $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = m_2$, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - m_2 x) = c_2$, तब $y = m_2 x + c_2$ एक अनन्त स्पर्शी है। (बाँयी ओर झुका हुआ)

दो वक्रों से परिबद्ध क्षेत्रफल (Area between two curves)

यदि $x \in [a, b]$ के लिए $f(x) \geq g(x)$ हो तो वक्रों $y = f(x)$ तथा $y = g(x)$ और कोटियों $x = a$ तथा $x = b$ से

परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ है ।



Exercise - 1

1.A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. वक्र $x^2 = 4y$, x - अक्ष तथा रेखा $x = 2$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है-

- (A) 1 (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2

2. x - अक्ष तथा वक्र $y = 4x - x^2 - 3$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है-

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{8}{3}$

3. दो क्रमागत नति परिवर्तन बिन्दुओं के मध्य x - अक्ष के साथ वक्र $y = \sin ax$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है-

- (A) $\frac{4}{a}$ (B) $\frac{2}{a}$ (C) $\frac{1}{a}$ (D) $2a$

4. वक्र $y^2 = 4a$ तथा रेखा $x = 2$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है-

- (A) $\frac{8}{3}$ (B) $\frac{16}{3}$ (C) $\frac{8\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$

5. परवलय $y = 4x^2$, $x = 0$ तथा $y = 1, y = 4$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है-

- (A) 7 (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\frac{7}{3}$ (D) $\frac{7}{4}$

6. वक्र $y = \frac{1}{x^2}$ तथा इसकी अनन्त स्पर्शियों $x = 1$ और $x = 3$ के मध्य क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञान कीजिए।

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{6}$

7. वक्र $y^2 = 4x$ तथा रेखा $2x - 3y + 4 = 0$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है-

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$

8. वक्र $y = \sin x$, $y = \cos x$ तथा y - अक्षा से परिबद्ध क्षेत्रफल प्रथम चतुर्थांश में है-

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2} + 1$ (C) $\sqrt{2} - 1$ (D) $\sqrt{2} + 2$

9. वक्र $y = e^x$ तथा रेखाओं $y = |x - 1|$, $x = 2$ से परिबद्ध क्षेत्रफल दिया जाता है-

- (A) $e^2 + 1$ (B) $e^2 - 1$ (C) $e^2 - 2$ (D) इनमें से कोई नहीं
10. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ तथा रेखा $3x + 4y = 12$ के बीच प्रथम चतुर्थांश में परिबद्ध क्षेत्रफल है—
 (A) $6(\pi - 1)$ (B) $3(\pi - 2)$ (C) $3(\pi - 1)$ (D) इनमें से कोई नहीं
11. $y = \frac{1}{\cos^2 x}$; $x = 0$; $y = 0$ एवं $x = \frac{\pi}{4}$ परिबद्ध आकृति का क्षेत्रफल है—
 (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{4} + 1$ (C) 1 (D) 2
12. $y = 2 - |2 - x|$ तथा $y = \frac{3}{|x|}$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है—
 (A) $\frac{4 + 3\ln 3}{2}$ (B) $\frac{4 - 3\ln 3}{2}$ (C) $\frac{3}{2} + \ln 3$ (D) $\frac{1}{2} + \ln 3$
13. वक्र $|y| = x^3$ तथा $x = 0$ और $x = 2$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञान कीजिए ।
 (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16
14. $x = 0$ तथा $x = \frac{\pi}{4}$ के मध्य $f(x) = \sec^2 x$ का औसत मान क्या होगा—
 (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{2}{\pi}$ (D) $\frac{4}{\pi}$

.....

1-B (विषयात्मक प्रश्न)

.....

1. समाकलन की मूलभूत प्रमेय का प्रयोग करते हुए समकोण त्रिभुज जिसका आधार b तथा शीर्षलम्ब a हो, का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।
2. (i) $x = 0$ तथा $x = 4 - y^2$ परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।
 (ii) वक्र $y^2 = 2y - x$ तथा $y -$ अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करो ।
3. वक्र $y = \frac{x-1}{x+1}$ तथा इसकी अनन्त स्पर्शियों $x = 1$ और $x = 2$ के मध्य क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।
4. वक्र $y = 1 + 8/x^2$ तथा $x = 2$ व $x = 4$ से परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । यदि कोटि $x = a$ से परिबद्ध क्षेत्र को दो समान भागों में विभाजित करती है, तो 'a' का मान ज्ञात कीजिए ।
5. परवलयों $y^2 = x$ और $x = 3 - 2y^2$ से बने क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

6. वक्र $x^2 + 2x - 4ky + 3 = 0$ पर स्थित बिन्दु जिसका कि भुज 3 है, पर स्पर्श रेखा बनाई जाती है। यदि यह स्पर्श रेखा रेखा $x + 3 = 2y$ के लम्बवत् है, तो वक्र, स्पर्श रेखा $x -$ अक्ष तथा $x = -1$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. सरल रेखाओं $x = 0, x = 2$ और वक्रों $y = 2^x$ तथा $y = 2x - x^2$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
8. सतत् फलन $f(x)$ ज्ञात कीजिए, जबकि $x -$ अक्ष वक्र $y = f(x)$ और सरल रेखा $x = 1$ तथा $x = a$ से बने क्षेत्र का क्षेत्रफल $(\sqrt{1+a^2}) - \sqrt{2}$ है। जहाँ $a > 1$ है।
9. प्रदर्शित करें कि वक्र $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ दो लूप बनाती है। साथ ही प्रत्येक लूप का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

Exercise - 2

2-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. वक्र $y^2 = (7-x)(5+x)$ का $x -$ अक्ष के ऊपर तथा कोटियों $x = -5$ और $x = 1$ से परिबद्ध से क्षेत्रफल है—
 (A) 9π (B) 18π (C) 15π (D) इनमें से कोई नहीं
2. वक्र $y = 1 + 4x - x^2$ तथा रेखाओं $x = 0, x = \frac{3}{2}$ एवं $y = 0$ से परिबद्ध क्षेत्रफल को रेखा समद्विभाजित करती है, ता $y = mx$ का मान है—
 (A) $\frac{13}{6}$ (B) $\frac{6}{13}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) 4
3. वृत्त $x^2 + y^2 - 2x = 0$ तथा $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ से वृत्त से ऊपरी अर्द्ध भाग में परिबद्ध क्षेत्रफल है—
 (A) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}$ (B) $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}$ (C) $\pi - \frac{8}{\pi}$ (D) इनमें से कोई नहीं
4. $y = x, y = -x$ तथा वक्र $y = \sqrt{x^2 - 5}$ के बिन्दु $(3, 2)$ पर स्पर्श रेखा से परिबद्ध क्षेत्रफल है—
 (A) 5 (B) $\frac{15}{2}$ (C) 10 (D) $\frac{35}{2}$
5. वक्रों $y = \log_e(x + e), x = \log_e\left(\frac{1}{y}\right)$ तथा $x -$ अक्ष से परिबद्ध क्षेत्रफल है—
 (A) 2 (B) 1 (C) 4 (D) इनमें से कोई नहीं

6. किसी द्विकोटी द्वारा परवलय पर काटा गया क्षेत्र द्विकोटी और इसकी शीर्ष से दूरी से निर्मित आयत के क्षेत्र का k गुना हो, तो k का मान है—
 (A) $2/3$ (B) $3/2$ (C) $1/3$ (D) 3
7. वक्र $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ तथा गलत्र¹ से परिबद्ध क्षेत्रफल है—
 (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) इनमें से कोई नहीं
8. $0 < y < 3 - x - x^2$ तथा $x > 0$ होने के लिए क्षेत्र का क्षेत्रफल है—
 (A) $\int_1^3 (3 - 2x - x^2) dx$ (B) $\int_0^3 (3 - 2x - x^2) dx$
 (C) $\int_0^1 (3 - 2x - x^2) dx$ (D) $\int_{-1}^3 (3 - 2x - x^2) dx$
9. वक्र $xy^2 = a^2(a - x)$ तथा इसी अनंत स्पर्शियों के मध्य का क्षेत्रफल है—
 (A) $\frac{\pi a^2}{2}$ (B) $2\pi a^2$ (C) πa^2 (D) इनमें से कोई नहीं
10. वक्र $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है—
 (A) $\frac{3\pi a^2}{8}$ (B) $\frac{3\pi a^2}{16}$ (C) $\frac{3\pi a^2}{32}$ (D) $3\pi a^2$
11. $|y| = 1 - x^2$ स परिबद्ध क्षेत्रफल वर्ग इकाई में है—
 (A) $\frac{2}{e}$ (B) $1 - \frac{2}{e}$ (C) $\frac{1}{e}$ (D) इनमें से कोई नहीं
12. वक्रों $y = xe^x, y = xe^{-x}$ तथा रेखा $x = 1$ परिबद्ध क्षेत्रफल है—
 (A) $\frac{2}{e}$ (B) $1 - \frac{2}{e}$ (C) $\frac{1}{e}$ (D) $1 - \frac{1}{e}$

2-B (विषयात्मक प्रश्न)

1. रेखा $3x + 2y = 13$, वक्र $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0$ से परिबद्ध क्षेत्रफल को दो भागों में विभाजित करती है। बड़े क्षेत्रफल और छोटे क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात कीजिए।
2. 'a' के किस मान के लिए वक्र $y = a^2x^2 + ax + 1$ तथा सरल रेखाओं $y = 0, x = 0$ एवं $x = 1$ से परिबद्ध क्षेत्रफल न्यूनतम होगा।
3. वक्र $y = \ln x$ एवं $y = \ln^2 x$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. फलन $y = x(x-1)^2, 0 \leq x \leq 2$ के सभी उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए। वक्र $y = x(x-1)^2, y$ - अक्ष तथा रेखा $y = 2$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।
5. वक्र $C: Y = \tan x$, वक्र C के बिन्दु $x = \frac{\pi}{4}$ पर स्पर्श तथा x - अक्ष से प्रथम चतुर्थांश में परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. परवलय $x = -2y^2, x = 1 - 3y^2$ तथा y - अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल कीजिए।
7. वक्र $x^2 + \alpha x - y + 2 = 0$ के उस बिन्दु जिसका भुज 1 है, पर अभिलम्ब रेखा $y = x$ के समान्तर है। प्रथम चतुर्थांश में वक्र अभिलम्ब तथा x - अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
8. वक्रों $y = e.x \ln x$ एवं $y = x/(e.x)$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Exercise - 3

3-A (स्तम्भ मिलान)

- | | | |
|----|--|------------|
| 1. | स्तम्भ - I | स्तम्भ II |
| | (A) $y = x^3, x$ - और $x = 1$ एवं $x = 2$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है- | (q) $1/3$ |
| | (B) प्रथम चतुर्थांश में $y \leq 4x - x^2$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है। | (q) $15/4$ |
| | (C) क्षेत्र $\{(x, y) : x^2 \leq y \leq x \}$ का क्षेत्रफल | (r) $3/2$ |
| | (D) $y = x^3, y = x^2$ और कोटिओं $x = 0, x = 2$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है- | (s) $32/3$ |
| 2. | स्तम्भ-I | |
| | (A) क्षेत्र $0 \leq y \leq 4x - x^2 - 3$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है- | (q) $32/3$ |
| | (B) $y^2 = 8x$ और $y = 2x$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है। | (q) $8/3$ |
| | (C) $y = \cos x, y = x + 1$ एवं $y = 0$ से परिबद्ध का क्षेत्रफल | (r) $4/3$ |
| | (D) $x \leq 4 - y^2$ एवं $x \geq 0$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है- | (s) $32/3$ |

3-B (कथन/कारण)

3. कथन -1 : परवलय $y = x^2 - 4x + 3$ एवं $y = 0$ से परिबद्ध क्षेत्रफल $4/3$ वर्ग इकाई है।

कथन -2: वक्र $y = f(x) \geq 0$ एवं $y = 0$ तथा कोटियों $x = a$ एवं $x = b (b > a)$ से परिबद्ध क्षेत्रफल $\int_a^b f(x) dx$ है।

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है: कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है: कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है:।

4. कथन-1: वक्रों $y = y^2$ एवं $y = x^3$ से परिबद्ध क्षेत्रफल $\frac{1}{12}$ वर्ग इकाई है।

कथन-2 $y = f(x)$ तथा $y = g(x)\{f(x) > g(x)\}$ तथा $x = a, x = b$ से परिबद्ध क्षेत्रफल $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ जहां

$(b > a)$ है।

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है: कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है: कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है:।

5. कथन-1: वक्रों $y = 3x - x^2$ एवं $y = x^2 - x$ से परिबद्ध क्षेत्रफल $\frac{4}{3}$ है।

कथन-2: वक्रों $y = f(x), y = g(x)$ तथा $x = a, x = b (b > a)$ से परिबद्ध क्षेत्रफल $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ है।

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है: कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है: कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है:।

6. कथन-1: वक्र $y = \cos x, y = 0, x = 0$ तथा $x = \frac{3\pi}{4}$ से परिबद्ध क्षेत्रफल $2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ है।

कथन-2: वक्र $y = f(x), x -$ अक्ष तथा कोटियों $x = a$ एवं $x = b$ से परिबद्ध क्षेत्रफल $\int_a^b f(x) dx$ है।

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है: कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है: कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है:।

3-C (अनुच्छेद)

7. निश्चित समाकलन का एक महत्वपूर्ण ज्यामितीय उपयोग यह है कि इसे क्षेत्रफल ज्ञात करने में उपयोग किया जाता है। हालांकि निश्चित समाकलन सदैव क्षेत्रफल के बराबर नहीं होता है, लेकिन दोनों गणितीय समस्याएं परस्पर निकट सम्बन्धी हैं। यदि क्षेत्रफल ज्ञात हो तो हम निश्चित समाकलन ज्ञात कर सकते हैं। और इसका विलोम भी सत्य है। माना कि ख, महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।

7.1 $y = \cot^{-1} x, x = -1$ तथा $x = 1$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है।
 (A) 0 (B) $\pi/2$ (C) π (D) 2π

7.2 $\int_{-\pi/2}^{\pi} [\tan^{-1} x] dx =$
 (A) 0 (B) -5 (C) $15 - 2 \tan 1$ (D) $\tan 1 - 5$

7.3 $\int_{-\pi/2}^{\pi} \sin^{-1}(\sin x) dx$ के बराबर है—
 (A) $\frac{\pi^2}{8}$ (B) $\frac{\pi^2}{4}$ (C) $\frac{\pi^2}{16}$ (D) $\frac{\pi^2}{2}$

8. अनुच्छेद
 वक्रों $y = f(x), y = x^2 + 2$ तथा $x = 2, x = \alpha$ से परिबद्ध क्षेत्रफल $(\alpha^3 - 4\alpha^2 + 8)$ वर्ग इकाई दिया गया है। यह ज्ञात है कि वक्र $y = f(x)$, परवलय $y = x^2 + 2$ के नीचे स्थित है।

8.1 वक्र $y = f(x)$ x अक्ष एवं $x = 0, x = 1$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है।
 (A) $\frac{8}{3}$ (B) $\frac{16}{3}$ (C) $\frac{16}{7}$ (D) $\frac{4}{3}$

8.2 $x \in (p, q)$ में $f(x), x -$ अक्ष के ऊपर स्थित है, तो $(q - p)$ बराबर होगा—
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 8

8.3 रेखा $y = x + 2$ तथा $y = f(x), x = 2$ एवं $x = 4$ से परिबद्ध क्षेत्रफल का मान है—
 (A) $\frac{36}{5}$ (B) $\frac{7}{5}$ (C) $\frac{123}{13}$ (D) इनमें से कोई नहीं

3-D (सत्य/असत्य)

9. $y = e^x, y = e^{-x}$ तथा रेखा $x = 1$ से परिबद्ध क्षेत्रफल $e + \frac{1}{2} - 2$ है।

10. $y = \{x\}$ एवं $2x - 1 = 0, y = 0$ से परिबद्ध क्षेत्रफल $+\frac{1}{4}$ है। (जहां $\{ \}$ भिन्नत्मक भागफलन है)

11. क्षेत्र $R = \{(x, y); x^2 \leq y \leq x\}$ का क्षेत्रफल $\frac{1}{6}$ है।
12. a का धनात्मक मान $\frac{1}{2}$ है। जिसके लिए $y = \sin ax$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{a}$ एवं $x = \frac{\pi}{3a}$ से परिबद्ध क्षेत्रफल 3 है।
13. $y = x^3 - x$ एवं $y = x^2 + x$ से परिबद्ध क्षेत्रफल $\frac{37}{24}$ है।

3-E (रिक्त स्थान की पूर्ति)

14. वक्र $|x - 2| + |y + 1| = 1$ से परिबद्ध क्षेत्रफल ----- है।
15. वक्रों $y = \sin^{-1} x$, $y = \cos^{-1} x$ एवं $x = 0$ से परिबद्ध क्षेत्रफल ---- है।
16. a का मान ----- है जिसके लिए $y = x^2 - 3$ एवं $y = ax + 2$ से परिबद्ध क्षेत्रफल न्यूनतम हो है
17. $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ के मध्य $y = \tan x$, $y = \tan^2 x$ से परिबद्ध क्षेत्रफल ----- है।
18. वक्रों $y = \frac{x^2}{4a}$ एवं $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ से परिबद्ध क्षेत्रफल --- है।

Exercise - 4

4-A (पूर्ववर्ती JEE परीक्षा प्रश्न)

1. अनुच्छेद
समीकरण $y^3 - 3y + x = 0$ द्वारा वास्तविक रेखा (real line) में विभिन्न अंतरालों पर अस्पष्ट रूप से (implicitly) परिभाषित फलनों को लिजिए। यदि $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, समीकरा अस्पष्ट रूप से वास्तविक मानों वाला एकमात्र अवकलनीय फलन $y = f(x)$ परिभाषित करता है।
यदि $x \in (-2, 2)$ समीकरण अस्पष्ट रूप से वास्तविक मानों वाला एकमात्र अवकलनीय फलन $y = g(x)$ जिसके लिए $g(0) = 0$ परिभाषित करता है।
- 1.1 यदि $f(-10\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, तब $f'(-10\sqrt{2}) =$
(A) $\frac{4\sqrt{2}}{7^3 3^2}$ (B) $-\frac{4\sqrt{2}}{7^3 3^2}$ (C) $\frac{4\sqrt{2}}{7^3 3}$ (D) $-\frac{4\sqrt{2}}{7^3 3}$
- 1.2 वक्र $y = f(x)$, अक्ष x तथा रेखाओं $x = a$ और $x = b$ जहां $-\infty < a < b < -2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निम्न है
(A) $\int_a^b \frac{x}{3((f(x))^2 - 1)} dx + bf(b) - af(a)$ (B) $-\int_a^b \frac{x}{3((f(x))^2 - 1)} dx + bf(b) - af(a)$
(C) $\int_a^b \frac{x}{3((f(x))^2 - 1)} dx - bf(b) + af(a)$ (D) $-\int_a^b \frac{x}{3((f(x))^2 - 1)} dx - bf(b) + af(a)$

1.3 $\int_{-1}^1 g(x) dx =$
 (A) $2g(-)$ (B) 0 (C) $-2g(1)$ (D) $2g(1)$

2. वक्रों $y = \sqrt{\frac{1 + \sin x}{\cos x}}$ व $\sqrt{\frac{1 - \sin x}{\cos x}}$ और रेखाओं $x = 0$ व $x = \frac{\pi}{4}$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निम्न है

(A) $\int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}} dt$ (B) $\int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{4t}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}} dt$
 (C) $\int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}} dt$ (D) $\int_0^{\sqrt{2}+1} \frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}} dt$

IIT-JEE-2006

3. मिलान कीजिए-

स्तम्भ -I

(i) यदि वक्रों $y = 3^{x-1} \log x$ एवं $y = x^x - 1$ का प्रतिच्छेदन कोण θ हो तो $\tan \theta$ का मान है-

(ii) वक्रों $-4y^2 = x$ एवं $x - 1 = -5y^2$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है-

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\cos x} [\cos x \cot x = \log(\sin x)^{\sin x}] dx =$

(iv) दीर्घवृत्त $|z - 1| + |z + 3| = 5$ की नाभियों के बीच की दूरी है-

स्तम्भ-II

(A) 1

(B) 0

(C) 4

(D) 4/3

IIT-JEE-2005

4. परवलयों $y = (x + 1)^2$ एवं $y = (x - 1)^2$ तथा रेखा $y = \frac{1}{4}$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है-

(A) 4 वर्ग इकाई (B) $\frac{1}{6}$ वर्ग इकाई

(C) $\frac{4}{3}$ वर्ग इकाई (D) $\frac{1}{3}$ वर्ग इकाई

5. वक्रों $x^2 = y, x^2 = -y$ तथा $y^2 = 4x - 3$ से परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

6. यदि $\begin{bmatrix} 4a^2 & 4a & 1 \\ 4b^2 & 4b & 1 \\ 4c^2 & 4c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(-1) \\ f(1) \\ f(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a^2 + 3a \\ 3b^2 + 3b \\ 3c^2 + 3c \end{bmatrix}$, $f(x)$ एक द्विघात फलन है तथा बिन्दु V पर इसका अधिकतम मान प्राप्त

होता है $y = f(x)$ तथा $x -$ अक्ष का प्रतिच्छेद बिन्दु A हैं तथा बिन्दु B इस प्रकार है कि जीवा AB बिन्दु V पर समकोण बनाती है $f(x)$ तथा तीव्र AB से परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

7. यदि प्रथम चतुर्थांश में वक्रों $y = ax^2$ तथा $y = ay^2$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल 1 वर्ग इकाई हो, तो a का संभावित मान है—
 (A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) 1 (C) 3 (D) $\frac{1}{2}$

IIT-JEE – 2003

8. प्रथम चतुर्थांश में वक्रों $y = \sqrt{x}$, $2y + 3 = x$ तथा x - अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है—
 (A) 9 (B) $\frac{27}{4}$ (C) 36 (D) 18

IIT-JEE - 2002

9. वक्रों $y = |x| - 1$ तथा $y = -1|x| + 1$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है—
 (A) 1 (B) 2 (C) $2\sqrt{2}$ (D) 4
10. वक्रों $y = x^2$, $y = |2 - x^2|$ एवं $y = 2$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो रेखा $x = 1$ के दायी ओर स्थित है।

IIT-JEE - 2001

11. प्रथम चतुर्थांश में वक्र $f(x) + x^2 + bx - b$ के बिन्दु $(1,1)$ पर स्पर्श रेखा तथा निर्देशी अक्षों द्वारा एक त्रिभुज बनाया जाता है। यदि इसका क्षेत्रफल 2 वर्ग इकाई हो, तो b का मान है—
 (A) -1 (B) 3 (C) -3 (D) 1
12. माना कि $b \neq 0$ तथा $j = 0, 1, 2, \dots, n$ के लिए y - अक्षा तथा वक्र $xe^{ay} = \sin by$, $\frac{j\pi}{b} \leq y \leq \frac{(j+1)\pi}{b}$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल S_j है। प्रदर्शित कीजिए कि $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$ गुणोत्तर श्रेणी में है तथा $a = -1$ व $b = \pi$ के लिए इनका योग भी ज्ञात कीजिए।

IIT-JEE - 1999

13. m के किस मान के लिए वक्र $y = x - x^2$ तथा रेखा $y = mx$ से परिबद्ध $\frac{9}{2}$ वर्ग इकाई है।
 (A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं
14. यदि $f(x) = \begin{cases} 2x & ; |x| \leq 1 \\ x^2 + ax + b & ; |x| > 1 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $f(x)$ सतत् है। तृतीय चतुर्थांश में वक्रों $x = -2y^2$ एवं $y = f(x)$ द्वारा परिबद्ध तथा रेखा $8x + 1 = 0$ के बायी ओर स्थित क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

IIT-JEE - 1998

15. माना कि C_1 तथा C_2 क्रमशः फलन $y = X^2$ तथा लल $y = 2x$ जबकि $0 \leq x \leq 1$ के रेखाचित्र है। माना कि C_3 फलन $y = f(x), 0 \leq x \leq 1, f(0) = 0$ का रेखाचित्र है। C_1 पर स्थित किसी बिन्दु p के लिए माना कि बिन्दु p से गुजरने वाली तथा अक्षों के समान्तर रेखाएं C_2 तथा C_3 को क्रमशः Q तथा R पर मिलती है। यदि C_1 पर स्थित बिन्दु P की प्रत्येक स्थिति के लिए छायांकित क्षेत्र OPQ एवं ORP के क्षेत्रफल बराबर हो, तो फलन $f(x)$ ज्ञात कीजिए।

IIT-JEE - 1997

16. माना कि $f(x) = \text{उच्चतम } \{x^2, (1-x)^2, 2x(1-x)\}$ जहां $0 \leq x \leq 1$ है। तब वक्र $y = f(x), x -$ अक्ष $x = 0$ एवं $x = 1$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

IIT-JEE - 1996

17. माना कि A_n वक्र $y = (\tan x)^n$ तथा रेखाओं $x = 0, y = 0$ एवं $x = \pi/4$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है, सिद्ध कीजिए कि $n > 2$ के लिए $A_n + A_{n-2} = 1/(n-)$ है और निगमन भी कीजिए $1/(2n+2) < A_n < 1/(2n-2)$.

IIT-JEE - 1995

18. एक वर्ग लेने पर जिसे शीर्ष $(1,1), (-1,1), (-1,-1) \& (1,-1)$ है। माना S वह क्षेत्र है जो वर्ग के अंदर के वे सभी बिन्दुओं जो किसी किनारे की तुलना में मूल बिन्दु के पास हो है। क्षेत्र S का रेखाचित्र बनाइए एवं उसका क्षेत्रफल बताइए।

4-B (पूर्ववर्ती AIEEE/DCE परीक्षा प्रश्न)

19. वक्रों $y^2 = x$ एवं $y = |x|$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है।
 (A) $\frac{2}{3}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{3}$
20. अधिकतम क्षेत्रफल वाले आयत जो कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ से घिरा हुआ है का क्षेत्रफल है—
 (A) $\frac{a}{b}$ (B) \sqrt{ab} (C) ab (D) $2ab$.
21. माना कि $f(x)$ एक अत्रुणात्मक सतत् फलन है जिसके लिए वक्र $y = f(x), x -$ अक्ष एवं कोटियों $x = \pi/4, x = \beta > \pi/4$ से परिबद्ध क्षेत्रफल $\left(\beta \sin \beta + \frac{\pi}{4} \cos \beta + \sqrt{2} \beta \right)$ है। तब $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ है—
 (A) $\left(1 - \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\right)$ (B) $\left(1 - \frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\right)$ (C) $\left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{2} + 1\right)$ (D) $\left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{2} - 1\right)$
22. वक्र $y = \log_e(x + e)$ और निर्देशांक अक्षों से परिबद्ध क्षेत्रफल है—
 (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

23. वक्रों $y = |x - 2|$, $x = 1$, $x = 3$ तथा x - अक्ष से परिबद्ध क्षेत्रफल है—
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
24. वक्रों $y = |x - 1|$ एवं $y = 3 - |x|$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है—
(A) 2 वर्ग इकाई (B) 3 वर्ग इकाई (C) 4 वर्ग इकाई (D) 6 वर्ग इकाई
25. वक्रों $y = x^2$, $x = y^2$ के मध्य क्षेत्रफल है—
(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{9}$
26. sine व cosine के अरेख एक दूसरे को इस प्रकार काटते हैं जिससे परिमित क्षेत्रफल वाले अनन्त क्षेत्रफल बनते हैं। ऐसे एक क्षेत्रफल का मान है—
(A) $\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$
27. माना y वह फलन है तो बिन्दु (1,2) से जाता है जिसका ढाल $(2x + 1)$ है। वक्र एवं x - अक्ष से परिबद्ध क्षेत्रफल है—
(A) 6 वर्ग इकाई (B) $\frac{5}{6}$ वर्ग इकाई (C) $\frac{1}{6}$ वर्ग इकाई (D) इनमें से कोई नहीं
28. असमिका $3y + x \geq 3$ एवं $x \geq 0, y \geq 0$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है—
(A) घिरा हुआ (B) बिना घिरा हुआ (C) उत्तल (D) अवतल
29. वक्र $ay = 3(a^2 - x^2)$ एवं x - अक्ष से परिबद्ध क्षेत्रफल है (वर्ग इकाई में)
(A) a^2 (B) $2a^2$ (C) $3a^2$ (D) $4a^2$

Answers

EXERCISE #1-A

1. B 2. C 3. B 4. D 5. C 6. B 7. A 7. $\frac{7}{6}$ 8. $\frac{e^{25}}{4e}$ sq. units

8. C 9. C 10. B 11. C 12. B 13. C 14. D

EXERCISE #1-B

1. AB/SQ. UNIT

2. (i) $32/3$ sq. unit (ii) $4/3$ sq. units

3. $\ln 9/4$

4. 4 sq. units., $a = 2\sqrt{2}$

5. 4 sq. units

6. $\frac{1}{3}$ sq. units

7. $\left(\frac{3}{\log_e 2} - \frac{4}{3}\right)$ sq. units

8. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

9. $\frac{2}{3}a^2$

EXERCISE #2-A

1. A 2. A 3. A 4. D 5. A 6. A 7. D

8. A 9. A 10. D 11. C 12. C 13. A 14. A

15. B 16. D 17. C 18. A 19. A 20. C

EXERCISE #2-B

1. $\frac{3\pi+2}{\pi-2}$ 2. $a = -\frac{3}{4}$

3. $(3-e)$ squnits 4. $\frac{10}{3}$ 5. $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}$

6. $\frac{4}{3\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)$

EXERCISE #3

1.

(A) \rightarrow (q), (B) \rightarrow (s), (C) \rightarrow (p), (D) \rightarrow (r)

2.

(A) \rightarrow (s), (B) \rightarrow (s), (C) \rightarrow (q), (D) \rightarrow (p)

3. B 4. A 5. C 6. D 7.1 C 7.2 B 7.3 A

8.1 B 8.2 C 8.3 D 9. Ture 10. False

11. Ture 12. Ture 13. False 14. 2 sq. unit

15. $(2-\sqrt{2})$ sq.unit 16. $a=0$

17. $\left(\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2} - 1\right)$ sq. units

18. $\left[\frac{2a^2}{3}(\pi-2)\right]$ sq. unit

EXERCISE #4

1.1 B 1.2 A 1.3 D 2. B

3.

(A) \rightarrow (q), (B) \rightarrow (s), (C) \rightarrow (p), (D) \rightarrow (r)

4. D 5. $\frac{1}{3}$ square units 6. $\frac{125}{3}$ square units

7. A 8. A 9. B 11. C

12. $\frac{20}{3} - 4\sqrt{4}$ sq. units 13. B

14. $\frac{257}{192}$; $a=2$; $b=-1$ 15. $f(x) = x^3 - x^2$

16. $\frac{17}{27}$ 18. $\frac{1}{3}(16\sqrt{2}-20)$ 19. C

21. D 22. A 23. D 24. C 25. B 26. B 27. C
28. B 29. D

MQB

EXERCISE # 1 (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. वक्रों $7x^2 + 9y + 9 = 0$ तथा $5x^2 + 9y + 27 = 0$ से परिबद्ध क्षेत्रफल है—
 (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16
2. उच्चतम $(|x|, |y|) \leq 1$ तथा $xy \leq \frac{1}{2}$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है—
 (A) $1/2 + \ln 2$ (B) $3 + \ln 2$ (C) $31/4$ (D) 16
3. वक्र $y = x^2, y = [x + 1], x \leq 1$ तथा y - अक्ष से परिबद्ध क्षेत्रफल है—
 (A) $1/3$ (B) $2/3$ (C) 1 (D) $7/3$
4. यदि एक वक्र $y = a\sqrt{x} + bx$ बिन्दु $(1, 2)$ से गुजरता है तथा वक्र रेखा $x = 4$ तथा x - अक्ष से परिबद्ध क्षेत्रफल 8 वर्ग इकाई है तो—
 (A) $a=3, b=-1$ (B) $a=3, b=1$ (C) $a=-3, b=1$ (D) $a=-3, b=-1$
5. x - अक्ष वक्र $y = f(x)$ तथा रेखाओं $x = a, x = b$ से परिबद्ध क्षेत्रफल $\sqrt{b^2 - a^2}$ है जबकि $b > a$ है तो फलन $f(x)$ का मान है—
 (A) $\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ (B) $\frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ (C) $\frac{b}{x^2 a^2}$ (D) इनमें से कोई नहीं
6. वक्रों $y = x(1 - \ln x); x = e^{-1}$ और $x = e^{-1}$ तथा $x = e$ के बीच घनात्मक x - अक्ष से परिबद्ध क्षेत्रफल है—
 (A) $\left(\frac{e^2 - 4e^{-2}}{5}\right)$ (B) $\left(\frac{e^2 - 5e^{-2}}{4}\right)$ (C) $\left(\frac{4e^2 - e^{-2}}{5}\right)$ (D) $\left(\frac{5e^2 - e^{-2}}{4}\right)$
7. प्रथम चतुर्थांश में $y = x^{1/3}; y = -x^2 + 2x^3; y = 2x - 1$ तथा कोटियों के अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है—
 (A) $12/55$ (B) $55/12$ (C) $32/55$ (D) कोई नहीं
8. वक्र $y^2 = 6x$ द्वारा विभाजित वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ के भागों के क्षेत्रफलों का अनुपात है—
 (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{4\pi - \sqrt{3}}{8\pi + \sqrt{3}}$ (C) $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{8\pi - \sqrt{3}}$ (D) इनमें से कोई नहीं
9. वक्र $xy = a^2$, ऊर्ध्वाधर रेखा $x = a, x = 4a (a > 0)$ तथा x - अक्ष से निर्मित क्षेत्र का क्षेत्रफल है—
 (A) $a^2 \log 2$ (B) $2a^2 \log 2$ (C) $a \log 2$ (D) $2a \log 2$
10. वक्र $a^2 y^2 = (2a - x)x^5$ से परिबद्ध क्षेत्रफल तथा a त्रिज्या के वृत्त के क्षेत्रफल का अनुपात है—
 (A) 4 : 5 (B) 5 : 4 (C) 2 : 3 (D) 3 : 2

11. वक्रों $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{4-3x}$ एवं $y = 0$ से परिबद्ध आकृति का क्षेत्रफल है—
 (A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{8}{9}$ (C) $\frac{16}{9}$ (D) इनमें से कोई नहीं
12. वक्र $v = \cos x$; $y = 1 + \frac{2}{\pi}x$ एवं $x = \frac{\pi}{2}$ से परिबद्ध अकृति का क्षेत्रफल है—
 (A) $\frac{\pi+4}{4}$ (B) $\frac{3\pi}{4}$ (C) $\frac{3\pi+4}{4}$ (D) $\frac{3\pi-4}{4}$
13. $y = x(x-3)^2$ तथा $y = x$ से परिबद्ध क्षेत्रफल (वर्ग इकाई में) है—
 (A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) 8
14. वक्र $x = \cos^{-1} y$, रेखा $x = 1$ तथा y -अक्ष से परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए —
 (A) $\cos 1$ (B) $\tan 1$ (C) $\sin 1$ (D) इनमें से कोई नहीं
15. $f(x) = \text{न्यूनतम } \{x+1, 3-x\}$ हो, तो $f(x)$ तथा x -अक्ष से परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए—
 (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1
16. 'a' का एक मान ज्ञात करें जिसके लिए वक्र $y = 8x^2 - x^5$ सरल रेखाओं $x = 1, x = a$ तथा x -अक्ष से परिबद्ध क्षेत्रफल $\frac{16}{3}$ होगा—
 (A) 1 (B) 2 (C) -1 (D) $\frac{1}{2}$
17. परवलय $5x^2 - y = 0$ के अन्दर लेकिन परवलय $2x^2 - y + 9 = 0$ के बाहर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए—
 (A) $12\sqrt{3}$ (B) $6\sqrt{3}$ (C) $8\sqrt{3}$ (D) $8\sqrt{3}$
18. वक्र $y = xe^x$, $y = e^x$ और रेखा $x = -1$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए—
 (A) e (B) $e + \frac{2}{e}$ (C) $e - \frac{3}{e}$ (D) $e + \frac{3}{e}$

EXERCISE #2 (विषयात्मक प्रश्न)

- वक्र $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ के छोटे चाप तथा परवलय $y = x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{3}$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- उस क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो परवलय $y = -x^2 + 6x - 5$ के अंदर परवलय $y = -x^2 + 4x - 3$ के बाहर तथा सरल रेखा $y = 3x - 15$ के बाँयी तरफ स्थित है।
- वक्र $y = x \ln x$ और $y = 2x - 2x^2$ से परिबद्ध क्षेत्रफल को प्रदर्शित कीजिए, साथ ही परिबद्ध क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।
- वक्र $C : y = \sin 2x - \sqrt{3} |\sin x|$, $x -$ अक्ष को बिन्दु $(a, 0)$, $a \in (-\pi, \pi)$ पर काटता है
 A_1 : वक्र C तथा धनात्मक $x -$ अक्ष द्वारा मूल बिन्दु और $x = a$ के मध्य परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल
 A_2 : वक्र C ऋणात्मक $x -$ अक्ष द्वारा मूल बिन्दु और $x = a$ के मध्य परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल सिद्ध कीजिए कि
 $A_1 + A_2 + 8A_1A_2 = 4$
- दिये गये वक्रों $Y = 1/x^2$ & $y = 1/[4(x-1)]$ के लिए -
 (i) 'a' के किस मान पर वक्रों और रेखाओं $x = 2$ & $x = a$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल का प्रतिलोग 'a' के बराबर होगा।
 (ii) 'b' ($1 < b < 2$) के किस मान पर वक्रों और रेखाओं $x = b$ & $x = 2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल $1 - 1/b$ के बराबर होगा।
- वर्ग जिसके शीर्ष $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, तथा $(1,-1)$, है। माना कि S एक ऐसा क्षेत्र है जिसके अन्दर ऐसे सभी बिन्दु विद्यमान हैं जो कि वर्ग के अन्दर हैं, साथ ही बिन्दु वर्ग की किसी भी भुजा की तुलना में मूलबिन्दु से समीप है। परिबद्ध क्षेत्रफल को प्रदर्शित कीजिए साथ ही परिबद्ध क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।
- फलन $f(x) = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$, $x \in [-1,1]$ का रेखाचित्र बनाइए तथा फलन के आलेख एवं $x -$ अक्ष के मध्य $x = 0$ से 1 तक परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Answers

EXERCISE #1

1. C 2. B 3. B 4. A 5. A 6. B 7. B
 8. C 9. B 10. B
 11. B 12. D 13. D 14. C 15. A 16. C 17. A
 18. C

EXERCISE #2

1. $\frac{32}{3} - 4\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}$ 2. $\frac{73}{6}$ 3. $7/12$ 5.
 $a = 1 + e^2, b = 1 + e^{-2}$ 6. $\frac{1}{3}(16\sqrt{2} - 20)$
 7. $3(\sqrt{3} - 1)$ sq. units