

विध्न विचारत भीरु जन, नहीं आरम्भे काम,  
विपति देख छोड़े तुरंत मध्यम मन कर श्याम।  
पुरुष सिंह संकल्प कर, सहते विपति अनेक,  
'बना' न छोड़े ध्येय को, रघुबर राखे टेक।।

रचित: मानव धर्म प्रणेता

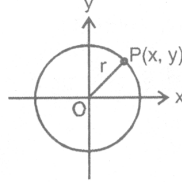
सद्गुरु श्री रणछोड़दासजी महाराज

## वृत्त (Circle)

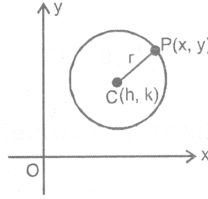
वृत्त उस बिन्दु का बिन्दुपथ होता है जिसकी स्थिर बिन्दु से दूरी सदैव अचर रहती है। स्थिर बिन्दु को वृत्त का केन्द्र एवम् अचर दूरी को वृत्त की त्रिज्या कहते हैं।

वृत्त की समीकरण के विभिन्न रूप (Equation of a circle in various forms) :

- (a) उस वृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र मूल बिन्दु एवं त्रिज्या 'r' हैं,  $x^2+y^2=r^2$  होता है।



- (b) उस वृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र (h, k) और त्रिज्या 'r' है,  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$  होता है।



- (c) वृत्त का व्यापक समीकरण

$X^2+Y^2+2gx+2fy+c=0$  होता है जिसका केन्द्र  $(-g,-f)$  और त्रिज्या  $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$  होती हैं।

यह समीकरण  $(x-h)^2+(y-b)^2=r^2$  से प्राप्त किया जा सकता है।

$$\Rightarrow x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$
$$-h=g, -k=f \quad h^2+k^2-r^2=c \text{ लेने पर}$$

तथा यदि

$$g^2 + f^2 - c > 0 \Rightarrow \text{वास्तविक वृत्त}$$

$$g^2 + f^2 - c = 0 \Rightarrow \text{बिन्दु वृत्त}$$

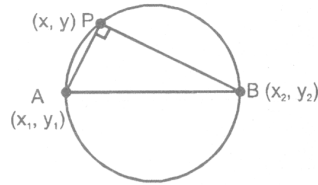
$$g^2 + f^2 - c < 0 \Rightarrow \text{काल्पनिक वृत्त जिसका केन्द्र } (-g, -f) \text{ वास्तविक होता है।}$$

नोट : x, y के पदों वाली प्रत्येक द्विघात समीकरण जिनमें  $x^2$  और  $y^2$  के गुणांक बराबर हो तथा xy का

गुणांक

शून्य होता है, सदैव एक वृत्त को प्रदर्शित करती है।

- (d) बिन्दुओं  $(x_1, y_1)$  और  $(x_2, y_2)$  का मिलाने वाली रेखा को व्यास मानकर खींचे गये वृत्त का समीकरण निम्न प्रकार दिया जाता है :  $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ .



यह इस तथ्य से प्राप्त है  $\angle APB = 90^\circ$  कोण होता है।  
 $\therefore$  (PA की प्रवणता)  $\cdot$  (PB की प्रवणता) = -1

$$\Rightarrow \frac{y-y_1}{x-x_1} \cdot \frac{y-y_2}{x-x_2} = -1$$

यह  $(x_1, y_1)$  और  $(x_2, y_2)$  से गुजरने वाला न्यूनतम त्रिज्या का वृत्त होता है।

**वृत्त द्वारा अक्षों पर काटे गये अन्तः खण्डः (Intercepts made by a circle on the axes):**

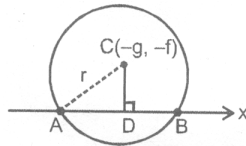
वृत्त  $X^2+Y^2+2gx+2fy+c=0$  द्वारा x तथा y अक्षों पर काटे गये अन्तः खण्डों की लम्बाई क्रमशः  $2\sqrt{g^2-c}$  (x- अक्ष पर )

और  $2\sqrt{f^2-c}$  (y- अक्ष पर ) होती हैं

$g^2-c > 0 \Rightarrow$  वृत्त x अक्ष को दो विभिन्न बिन्दुओं पर काटता है।

$g^2=c \Rightarrow$  वृत्त x- अक्ष को स्पर्श करता है।

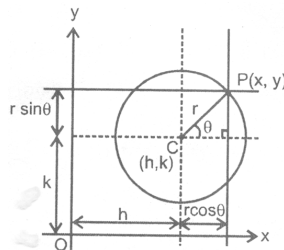
$g^2 < c \Rightarrow$  वृत्त पूर्णतया x- अक्ष के उपर या नीचे स्थित है।



$$AB = 2AD = 2\sqrt{r^2 - CD^2} = 2\sqrt{r^2 - f^2} = 2\sqrt{g^2 + f^2 - c^2 - f^2} = 2\sqrt{g^2 - c}$$

**वृत्त के प्राचलित समीकरण (Parametric equations of a circle) :**

वृत्त  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$  का प्राचालिक समीकरण  $x = h + r \cos \theta$  ;  $y = k + r \sin \theta$  ;  $-\pi < \theta \leq \pi$  जहाँ  $(h, k)$  केन्द्रक r त्रिज्या तथा  $\theta$  प्राचल हैं।

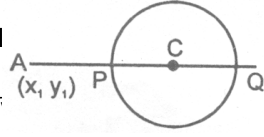


**वृत्त के सापेक्ष एक बिन्दु की स्थिति (Position of a point with respect to a circle) :**

बिन्दु  $(x_1, y_1)$  वृत्त  $S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$  के अन्दर, उपर या बाहर स्थित होगा यदि  $S_1 \equiv x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c < =$  or  $> 0$ .

नोट : किसी बिन्दु A की r त्रिज्या एवं केन्द्र 'C' वाले वृत्त से अधिकतम व न्यूनतम दूरी क्रमशः AC+r और AC-r होती हैं।

**सरल रेखा और वृत्त (Line and**



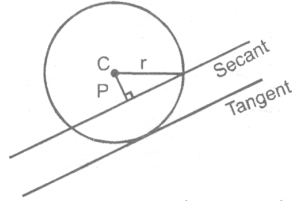
मना  $L=0$  एक सरल रेखा की दूरी हो, तो

यदि r वृत्त की त्रिज्या तथा p वृत्त के केन्द्र से सरल रेखा पर डाले गये लम्ब

- |       |                         |   |
|-------|-------------------------|---|
| (i)   | $p > r \Leftrightarrow$ | सरल रेखा वृत्त को नहीं काटती हैं अर्थात् वृत्त के बाहर से गुजरती हैं।   |
| (ii)  | $p = r \Leftrightarrow$ | सरल रेखा वृत्त को स्पर्श करती हैं (अर्थात् यह वृत्त की स्पर्श रेखा है।) |
| (iii) | $p < r \Leftrightarrow$ | सरल रेखा वृत्त की छेदन रेखा हैं।  |
| (iv)  | $p = r \Leftrightarrow$ | सरल रेखा वृत्त का व्यास है।   |

यदि  $Y=mx+c$  एक सरल रेखा और  $x^2 + y^2 = a^2$  एक वृत्त हैं, तो

- |       |                                    |  |
|-------|------------------------------------|--|
| (i)   | $c^2 > a^2(1+m^2) \Leftrightarrow$ | सरल रेखा वृत्त की जीवा होगी।                                     |
| (ii)  | $c^2 = a^2(1+m^2) \Leftrightarrow$ | सरल रेखा वृत्त को स्पर्श करेगी अर्थात् वृत्त की स्पर्श रेखा होगी |
| (iii) | $c^2 < a^2(1+m^2) \Leftrightarrow$ | सरल रेखा वृत्त को नहीं काटती है अर्थात् वृत्त के बाहर से गुजरेगी |



इन प्रतिबन्धों को क्रमानुसार  $y=mx+c$  तथा  $x^2+y^2=a^2$  को हल करके तथा प्राप्त द्विघात समीकरण का विवेकक क्रमशः शून्य से अधिक, शून्य के बराबर तथा शून्य से कम रखकर प्राप्त किया जा सकता है।

**स्पर्श रेखा का प्रवणता रूप (Slope form of tangent) :**

सरल रेखा  $y = mx+c$  सदैव वृत्त  $x^2+y^2=a^2$  की स्पर्श रेखा होगी यदि  $c^2=a^2(1+m^2)$

अतः स्पर्श रेखा की समीकरण  $y=mx \pm a\sqrt{1+m^2}$  और स्पर्श बिन्दु  $\left(-\frac{a^2m}{c}, \frac{a^2}{c}\right)$  है।

**स्पर्श रेखा का बिन्दु रूप (Point form of tangent) :**

(i) वृत्त  $x^2+y^2=a^2$  के बिन्दु  $(x_1,y_1)$  पर स्पर्श रेखा की समीकरण  $xx_1+yy_1=a^2$  होती है।

(ii) वृत्त  $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$  के बिन्दु  $(x_1,y_1)$  पर स्पर्श रेखा की समीकरण  $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$  होती हैं।

नोट : व्यापक रूप में किसी द्विघात वक्र के बिन्दु  $(x_1,y_1)$  पर स्पर्श रेखा की समीकरण  $x^2$  को  $x x_1$  में  $y^2$  को  $yy_1$

में, x को  $\frac{x+x_1}{2}$  में, y को  $\frac{y+y_1}{2}$  में, xy को  $\frac{x_1y+xy_1}{2}$  में परिवर्तित करके प्राप्त की जा सकती हैं जबकि c में कोई परिवर्तन नहीं किया जाता है।

**स्पर्श रेखा का प्राचलिक रूप (parametric form of tangent):**

वृत्त  $x^2+y^2=a^2$  के बिन्दु  $(a \cos\alpha, a \sin\alpha)$  पर स्पर्श रेखा का समीकरण  $x \cos \alpha + y \sin \alpha = a$  होता है।

नोट: बिन्दुओं P( $\alpha$ ) और Q( $\beta$ ) पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु  $\left( \frac{a \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}, \frac{a \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}} \right)$  है।

### अभिलम्ब (Normal) :

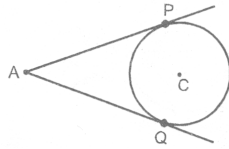
यदि कोई सरल रेखा एक वृत्त का अभिलम्ब है तो यह वृत्त के केन्द्र से गुजरनी चाहिए। अतः वृत्त

$X^2 + Y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  के बिन्दु  $(x_1, y_1)$  पर अभिलम्ब  $y - y_1 = \frac{y_1 + f}{x_1 + g}(x - x_1)$  है।

### एक बिन्दु से स्पर्श-युग्म (Pair of tangents from a point) :

बिन्दु A( $x_1, y_1$ ) से वृत्त  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  पर खींचे गये स्पर्श-युग्म का समीकरण  $SS_1 = T^2$  होता है।

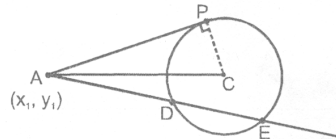
जहाँ  $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c$  ;  $S_1 \equiv x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$   
 $T \equiv xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$ .



### स्पर्श रेखा की लम्बाई और बिन्दु की शक्ति (Length of a tangent and power of a point) :

किसी बाह्य बिन्दु  $(x_1, y_1)$  से वृत्त  $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  पर खींची स्पर्श रेखा की लम्बाई

$L = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c} = \sqrt{S_1}$  के द्वारा दी जाती है।



AP = स्पर्श रेखा की लम्बाई  
 $AP^2 = AD \cdot AE$

किसी बिन्दु P से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई का वर्ग, वृत्त के सापेक्ष बिन्दु P की शक्ति कहलाती है।

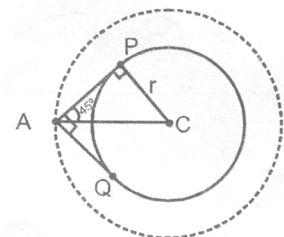
किसी वृत्त के सापेक्ष किसी नियत बिन्दु की शक्ति नियत होती है।

यदि बिन्दु P वृत्त के बाहर, अन्दर और वृत्त पर स्थित है तो बिन्दु की शक्ति क्रमशः धनात्मक, ऋणात्मक और शून्य होती है।

### नियामक वृत्त (Director Circle) :

दो परस्पर लम्बवत् स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दुओं दिये वृत्त का नियतांक वृत्त का नियामक वृत्त उस वृत्त की त्रिज्या का  $\sqrt{2}$  गुना त्रिज्या वाला संकेन्द्रीत वृत्त होता है।

सत्यापन:



$$AC = r \cos 45^\circ = r\sqrt{2}$$

**स्पर्शी जीवा (Chord of Contact) :**

यदि दो स्पर्श रेखाएँ  $PT_1$  और  $PT_2$  बिन्दु  $P(x_1, y_1)$  से वृत्त  $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  पर खींची गयी हैं, तो स्पर्श जीवा  $T_1T_2$  का समीकरण निम्न होगा।  $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$ .

**नोट :** यहाँ  $R =$  त्रिज्या;  $L =$  स्पर्श रेखा की लम्बाई है

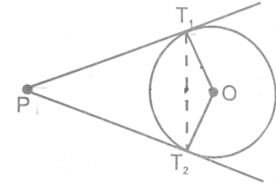
(a) स्पर्श जीवा तभी विद्यमान होगी जब बिन्दु 'P' वृत्त के अन्दर स्थित नहीं है।

(b) स्पर्श जीवा की लम्बाई  $T_1T_2 = \frac{2LR}{\sqrt{R^2 + L^2}}$

(c) स्पर्शी युग्म तथा स्पर्शी जीवा से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल  $= \frac{RL^3}{R^2 + L^2}$

(d) बिन्दु  $(x_1, y_1)$  से खींची गई स्पर्शी युग्म के बीच के कोण की स्पर्शज्या  $(\tan \theta) \left( \frac{2RL}{L^2 - R^2} \right)$

(e) त्रिभुज  $PT_1T_2$  के परिवर्तु का समीकरण  $(x + x_1)(x + g) + (y - y_1)(y + f) = 0$ .



**ध्रुव और ध्रुवी (Pole and Polar) :**

(i) यदि किसी स्थिर बिन्दु P से खींची गयी सरल रेखा दिये गये वृत्त को बिन्दु Q और R पर मिलती हैं तो Q और R पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के बिन्दुपथ को बिन्दु P की, वृत्त के सापेक्ष ध्रुवी कहते हैं तथा बिन्दु P इस ध्रुवी कहलाता है।

(ii) बिन्दु P  $(x_1, y_1)$  की वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2$  के सापेक्ष का समीकरण  $xx_1 + yy_1 = a^2$  हैं। इसी प्रकार यदि वृत्त व्यापक है तो ध्रुवी का समीकरण  $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$  अर्थात्  $T = 0$  होता है। ध्यान रहे कि यदि बिन्दु  $(x_1, y_1)$  वृत्त पर है तो स्पर्श रेखा और ध्रुवी समान समीकरण से प्रदर्शित होंगे। इसी तरह यदि बिन्दु  $(x_1, y_1)$  वृत्त के बाहर है तो स्पर्श जीवा और ध्रुवी एक ही समीकरण से प्रदर्शित होंगे।

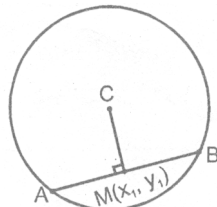
(iii) रेखा  $Ax + By + C = 0$  का वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2$  के सापेक्ष ध्रुव  $\left( -\frac{Aa^2}{C}, -\frac{Ba^2}{C} \right)$

(iv) यदि बिन्दु P की ध्रुवी बिन्दु Q से गुजरती है तो Q की ध्रुवी P से गुजरती है।

(v) दो रेखायें  $L_1$  एवं  $L_2$  संयुग्मी रेखायें कहलाती हैं यदि  $L_1$  का ध्रुव,  $L_2$  पर स्थित हो तथा  $L_2$  का ध्रुव  $L_1$  पर स्थित हो तथा दो बिन्दु P तथा Q संयुग्मी बिन्दु कहलाते हैं यदि P की ध्रुवी Q से गुजरती हो तथा Q की ध्रुवी P से गुजरती है।

**जीवा का समीकरण जिसका मध्यबिन्दु दिया हो – (Equation of the chord with a given middle point) :**

वृत्त  $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  की जीवा जिसका मध्य बिन्दु  $M(x_1, y_1)$  है, का समीकरण  $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$  है जो कि  $T = S_1$  से प्रदर्शित किया जाता है।



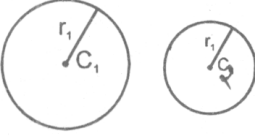

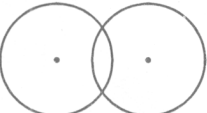


- नोट : (i) वृत्त के अन्दर बिन्दु 'M' से गुजरने वाली न्यूनतम लम्बाई की जीवा वह होती है जिसका मध्य बिन्दु M हो।  
(ii) वृत्त के अन्दर बिन्दु 'M' से गुजरने वाली जीवा जो केन्द्र से अधिकतम दूरी पर स्थित हो, का मध्य बिन्दु M होता है।

वृत्त के दो बिन्दुओं को जोड़ने वाली जीवा का समीकरण (Equation of the chord joining two points of circle) :

वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2$  पर स्थित दो बिन्दुओं P( $\alpha$ ) तथा Q( $\beta$ ) को जोड़ने वाली जीवा PQ का समीकरण निम्न होता है।

$$x \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + y \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = a \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

दो वृत्त की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ (Common tangents to two circles) :

स्थिति	स्पर्श रेखाओं की संख्या	स्थिति
(i) 	4 उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ (2 अनुस्पर्शी और 2 तिर्यक)	$r_1 + r_2 = C_1 C_2$ .
(ii) 	3 उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ	$r_1 + r_2 < C_1 C_2$ .
(iii) 	2 उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ	$ r_1 + r_2  < C_1 C_2 < r_1 + r_2$
(iv) 	1 उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा	$ r_1 + r_2  = C_1 C_2$ .
(v) 	कोई उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा नहीं	$C_1 C_2 <  r_1 + r_2 $ .

यहाँ  $C_1 C_2$  दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी है। )

- नोट : (i) दो वृत्तों की अनुस्पर्शी (direct) उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ एक ऐसे बिन्दु पर मिलती हैं जो वृत्तों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा को उनकी त्रिज्याओं के अनुपात में बाह्य विभाजित करता है।  
दो वृत्तों की तिर्यक स्पर्श रेखाएँ एक ऐसे बिन्दु पर मिलती हैं जो वृत्तों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा को उनकी त्रिज्याओं के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।  
(ii) बाह्य (external) तथा तिर्यक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की लम्बाई  
 $L_{ext} = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$  और  $L_{int} = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$  द्वारा दी जाती है। जहाँ  $d =$  दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की

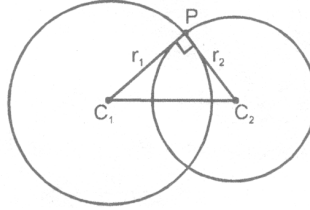
दूरी है और  $r_1, r_2$  वृत्तों की त्रिज्याएँ हैं तथा तिर्यक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की लम्बाई हमेशा बाह्य उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की लम्बाई से कम होती है।

### दो वृत्तों की लम्बकोणीयता (Orthogonality of Two Circles) :

दो वृत्त  $S_1=0$  और  $S_2=0$  लम्बकोणीय या लम्बकोणीय प्रतिच्छेदी कहलाते हैं यदि उनके प्रतिच्छेद बिन्दु पर स्पर्श रेखाएँ समकोण बनाती हैं,

दो वृत्तों के लम्बकोणीय होने का प्रतिबन्ध :  $2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2$  है।

सत्यापन :



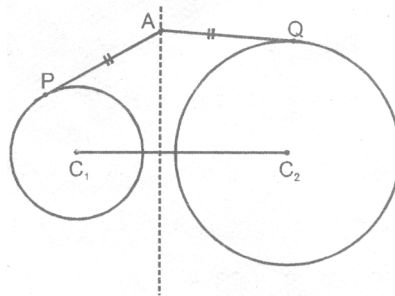
$$\begin{aligned} (C_1C_2)^2 &= (C_1P)^2 + (C_2P)^2 \\ \Rightarrow (g_1+g_2)^2 + (f_1-f_2)^2 &= g_1^2 + f_1^2 - c_1 + g_2^2 + f_2^2 - c_2 \\ \Rightarrow 2g_1g_2 + 2f_1f_2 &= c_1 + c_2 \end{aligned}$$

- नोट :**
- दो स्थिर वृत्तों को लम्बकोणीय काटने वाले एक चर वृत्त का केन्द्र उन वृत्तों के मूलाक्ष पर रहता है।
  - यदि दो वृत्त लम्बकोणीय हैं, तो प्रथम वृत्त पर स्थित बिन्दु 'P' की द्वितीय वृत्त के सापेक्ष ध्रुवी, बिन्दु Q से गुजरती है, जो कि बिन्दु P से गुजरने वाले व्यास का अन्तिम बिन्दु है। अतः ऐसे बिन्दु का बिन्दुपथ जिसकी ध्रुवियों वृत्त  $S_1=0, S_2=0$  के सापेक्ष संगामी हो, तो वृत्त होगा जो कि दिये गये तीनों वृत्तों से लम्बकोणीय होगा।  $S_3=0$
  - वृत्त का केन्द्र जो कि दिये गये तीनों वृत्तों के लम्बकोणीय है मूलाक्ष केन्द्र कहलाता है जबकि यह दिये गये वृत्तों के बाहर स्थित है।

### मूलाक्ष तथा मूलाक्ष केन्द्र (Radical Axis and Radical Centre) :

दो वृत्तों का मूलाक्ष एक ऐसे बिन्दु का बिन्दुपथ होता है जिसकी दिये गये वृत्तों के सापेक्ष शक्ति (power) परस्पर बराबर होती है।

दो वृत्तों  $S_1=0$  और  $S_2=0$  के मूलाक्ष का समीकरण  $S_1-S_2=0$  अर्थात्  $2(g_1-g_2)x+2(f_1-f_2)y+(c_1-c_2)=0$  होता है।



तीन वृत्तों के मूलाक्षों का प्रतिच्छेद बिन्दु (युग्म में लेने पर) मूलाक्ष केन्द्र कहलाता है। इससे तीनों वृत्तों पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं की लम्बाई बराबर होती है।

- नोट :**
- यदि दो वृत्त प्रतिच्छेद करते हैं, तो उभयनिष्ठ जीवा की मूलाक्ष होती है।
  - यदि दो वृत्त परस्पर करते हैं, तो उभयनिष्ठ स्पर्श बिन्दु स्पर्श रेखा ही मूलाक्ष होती है।

- (c) मूलाक्ष हमेशा वृत्तों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् होता है।  
 (d) मूलाक्षा दो वृत्तों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु गुजरता है, यदि दोनों वृत्तों की त्रिज्याएँ बराबर हो।  
 (e) मूलाक्ष दो वृत्तों के मध्य उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा को दो बराबर भागों में विभाजित करती है।  
 (f) वृत्तों का निकाय जिसमें प्रत्येक युग्म समान मूलाक्ष रखता हो, समाक्ष वृत्तों का निकाय कहलाता है।  
 (g) वृत्त युग्म जिसकी मूलाक्ष नहीं होती संकेन्द्रीय होते हैं।

### वृत्त निकाय (Family of Circles) :

इस भाग के अन्दर, एक विशेष लक्षण वृत्त समूह का समीकरण ज्ञात किया गया है उदाहरणार्थ समीकरण  $x^2+y^2+4x+2y+\lambda=0$  जहाँ  $\lambda$  एक स्वेच्छ अचर है, एक नियत केन्द्र  $(-2,-1)$  परन्तु चर त्रिज्या वाले वृत्त समूह को प्रदर्शित करता है। कुछ अन्य वृत्त समूह के लिए निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं।

- (a) दो वृत्तों  $S_1=0$  और  $S_2=0$  के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्त निकाय का समीकरण  $S_1+KS_2=0$  ( $K \neq -1$  तथा  $S_1$  एवं  $S_2$  में  $x^2$  और  $y^2$  के गुणांक समान दिये गये हैं।)  
 (b) वृत्त  $S=0$  और सरल रेखा  $L=0$  के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्त निकाय का समीकरण  $S+KL=0$   
 (c) दो बिन्दुओं  $(x_1,y_1)$  और  $(x_2,y_2)$  से गुजरने वाले वृत्त निकाय को निम्न रूप में लिखा जा सकता है। :

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+K \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ द्वारा दिया जाता है। जहाँ } K \text{ प्राचल है।}$$

- (d) स्थिर बिन्दु  $(x_1,y_1)$  पर स्थिर सरल रेखा  $y-y_1=m(x-x_1)$  को स्पर्श करने वाले वृत्त निकाय का समीकरण  $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+K[y-y_1-m(x-x_1)]=0$  द्वारा दिया जाता है। जहाँ  $K$  प्राचल है।  
 (e) उस वृत्त निकाय का समीकरण जो कि ऐसे त्रिभुज के शीर्षों से गुजरता है जिसके भुजाएँ क्रमशः  $L_1=0; L_2=0$  और  $L_3=0$  है,  $L_1L_2+\lambda L_2L_3+\mu L_3L_1=0$  द्वारा दिया जाता है। जहाँ  $\lambda$  तथा  $\mu$  के मान निम्न प्रतिबन्धों का उपयोग कर निकाले जा सकते हैं -  $xy$  का गुणांक  $=0$  और  $x^2$  का गुणांक  $=y^2$  का गुणांक  
 (f) उस वृत्त का समीकरण जो की ऐसे चतुर्भुज के शीर्षों से गुजरता है जिसकी भुजाएँ क्रम से क्रमशः  $L_1=0, L_2=0, L_3=0, L_4=0$  और  $\mu L_1L_3+\lambda L_2L_4=0$  होती है। जहाँ  $\lambda$  तथा  $\mu$  के मान निम्न प्रतिबन्धों का उपयोग कर निकाले जा सकते हैं-  $xy$  का गुणांक  $=0$  और  $x^2$  का गुणांक  $=y^2$  का गुणांक

## Exercise – 1

### 1-A(बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. बिन्दुओं  $(1,2), (5,2)$  एवं  $(5,-2)$  से गुजरने वाले वृत्त की त्रिज्या है -

(A)  $5\sqrt{2}$

(B)  $2\sqrt{5}$

(C)  $3\sqrt{2}$

(D)  $2\sqrt{2}$



2. वृत्तों  $x^2+y^2-6x-8y-7=0$  और  $x^2+y^2-4x-10y-3=0$  के केन्द्र निम्न में से किस वृत्त के व्यास के अन्तिम बिन्दु हैं।  
 (A)  $x^2+y^2-5x-9y+26=0$  (B)  $x^2+y^2+5x-9y+14=0$   
 (C)  $x^2+y^2+5x-y-14=0$  (D)  $x^2+y^2+5x+y+14=0$
3. बिन्दुओं (0, 1) और (a, b) को मिलाने वाली सरल रेखा को व्यास मान कर खींचा गया वृत्त, x- अक्ष को जिन बिन्दुओं पर काटता है उनके भुज जिस समीकरण के मूल हैं, वह है –  
 (A)  $x^2+ax+b=0$  (B)  $x^2-ax+b=0$  (C)  $x^2+ax-b=0$  (D)  $x^2-ax-b=0$
4. वृत्त  $x^2+y^2-5x-13y-14=0$  द्वारा x- अक्ष और y- अक्ष पर अन्तः खण्ड कम्पन हैं –  
 (A) 9, 13 (B) 5, 13 (C) 9, 15 (D) इनमें से कोई नहीं
5. वृत्त  $x^2+y^2-6x-10y+c=0$  न तो अक्षों को काटता है और न ही स्पर्श करता है तथा बिन्दु (1, 4) वृत्त के अन्दर स्थित हो, तो c के संभावित मानों का परिसर है –  
 (A)  $c>9$  (B)  $c>25$  (C)  $c>29$  (D)  $25<c<29$
6. वृत्त  $x^2+y^2-2x+6y+1=0$  के सपेक्ष बिन्दु (1, 2) स्थित है –  
 (A) वृत्त के अन्दर (B) वृत्त के बाहर  
 (C) वृत्त पर (D) इनमें से कोई नहीं।
7. बिन्दु (2, 3) से वृत्त  $x^2+y^2-100=0$  पर खींची जा सकने वाली स्पर्श रेखाओं की संख्या है  
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं
8. बिन्दु (2, 3) से गुजरने वाली उन दो सरल रेखाओं के समीकरण जिन पर वृत्त  $x^2+y^2=25$ , 8 इकाई लम्बाई के अन्तः खण्डों की जीवा बनाता है, होंगे–  
 (A)  $2x+3y=13$ ,  $x+5y=17$  (B)  $y=3$ ,  $12x+5y=39$   
 (C)  $x=2$ ,  $9x-11y=51$  (D) इनमें से कोई नहीं।
9. रेखा  $3x+5y+9=0$  वृत्त  $x^2+y^2-4x+6y+5=0$  के सापेक्ष हैं –  
 (A) जीवा (B) व्यास (C) स्पर्श रेखा (D) इनमें से कोई नहीं
10. सरल रेखा  $4x+3y+5=0$  वृत्त  $x^2+y^2-6x+4y=12$  की स्पर्श रेखाओं के समीकरण हैं :  
 (A)  $4x+3y-7=0$ ,  $4x+3y+15=0$  (B)  $4x+3y-31=0$ ,  $4x+3y+19=0$   
 (C)  $4x+3y-17=0$ ,  $4x+3y+13=0$  (D) इनमें से कोई नहीं
11. सरल रेखा  $(x+g)\cos\theta+(y+f)\sin\theta=k$  के वृत्त  $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$  की स्पर्श रेखा होने के लिए प्रतिबन्ध है –  
 (A)  $g^2+f^2=c+k^2$  (B)  $g^2+f^2=c^2+k$  (C)  $g^2+f^2=c^2+k^2$  (D)  $g^2+f^2=c+k$
12. बिन्दु  $x^2+y^2=5$  की स्पर्श रेखा वृत्त  $x^2+y^2-8x+6y+20=0$  को किस बिन्दु पर स्पर्श करती हैं –  
 (A) (-2, 1) (B) (-3, 0) (C) (-1, -1) (D) (3, -1)
13. वृत्त  $x^2+y^2-4x+4y-17=0$  के अभिलम्ब का समीकरण जो बिन्दु (1, 1) से गुजरता है –  
 (A)  $3x+y-4=0$  (B)  $x-y=0$  (C)  $x+y=0$  (D) इनमें से कोई नहीं
14. मूल बिन्दु से वृत्त  $(x-7)^2+(y+1)^2=25$  पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के मध्य कोण होगा –  
 (A)  $\frac{\pi}{4}$  (B)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $\frac{\pi}{2}$  (D) इनमें से कोई नहीं
15. बिन्दु (1, 2) से वृत्त  $2x^2+2y^2+6x-8y+3=0$  पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई होगी –

- (A)  $\sqrt{3}$  (B)  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  (C)  $2\sqrt{3}$  (D) इनमें से कोई नहीं
16. वृत्त  $x^2+y^2+2gx+2fy+p=0$  के किसी बिन्दु से वृत्त  $x^2+y^2+2gx+2fy+q=0$  पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई है –  
 (A)  $\sqrt{q-p}$  (B)  $\sqrt{p-q}$  (C)  $\sqrt{q+p}$  (D) इनमें से कोई नहीं
17. वृत्त  $(x+2)^2+(y+1)^2=16$  के व्यास का वह समीकरण जो वृत्त द्वारा सरल रेखा  $x-2y-3=0$  पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई है –  
 (A)  $x+2y=0$  (B)  $2x+y-3=0$  (C)  $3x+2y-4=0$  (D) इनमें से कोई नहीं
18. वृत्त  $x^2+y^2-6x+2y-54=0$  द्वारा सरल रेखा  $2x-5y+18=0$  पर काटी गई जीवा के मध्य बिन्दु के निर्देशांक है –  
 (A) (1, 4) (B) (2, 4) (C) (4, 1) (D) (1, 1)
19. वृत्त  $x^2+y^2=4$  की उस जीवा के मध्य बिन्दु का बिन्दु पथ जो मूल बिन्दु पर समकोण बनाती है, होगा –  
 (A)  $x+y=2$  (B)  $x^2+y^2=1$  (C)  $x^2+y^2=2$  (D)  $x+y=1$
20. वृत्त  $(x+2)^2+(y-2)^2=49$  और  $(x-2)^2+(y+1)^2=4$  की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या है :  
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
21. वृत्त  $x^2+y^2-4x-6y-12=0$  और  $x^2+y^2+6x+18y+26=0$  के स्पर्श बिन्दु पर उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण है –  
 (A)  $12x+5y+19=0$  (B)  $5x+12y+19=0$  (C)  $5x-12y+19=0$  (D)  $12x-5y+19=0$
22. तीन वृत्तों  $x^2+y^2-2x+3y-7=0$ ,  $x^2+y^2+5x-5y+9=0$  एवं  $x^2+y^2+7x-9y+29=0$  को लम्बकोणीय काटने वाले वृत्त का समीकरण है –  
 (A)  $x^2+y^2-16x-18y-4=0$  (B)  $x^2+y^2-7x+11y+6=0$   
 (C)  $x^2+y^2+2x-8y+9=0$  (D) इनमें से कोई नहीं।
23. वृत्तों  $x^2+y^2=4$  और  $x^2+y^2-2x+6y+1=0$  की परिधियों को समद्विभाजित करने वाले वृत्त के केन्द्र का बिन्दु पथ है –  
 (A) एक सरल रेखा (B) वृत्त (C) परवलय (D) इनमें से कोई नहीं
24. वृत्त  $x^2+y^2-2x+8y-q=0$  की परिधि को वृत्त  $x^2+y^2+4x+12y+p=0$  समद्विभाजित करता हो, तो  $p+q$  का मान होगा –  
 (A) 25 (B) 100 (C) 10 (D) 48

-----  
**एक से अधिक विकल्प सही**

25. बिन्दुओं (1,-2) एवं (3,-4) से गुजरने वाले एवं x- अक्ष को स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण है –  
 (A)  $x^2+y^2+6x+2y+9=0$  (B)  $x^2+y^2+10x+20y+25=0$   
 (C)  $x^2+y^2-6x+4y+9=0$  (D) इनमें से कोई नहीं
26. बिन्दु (3,-6) से गुजरने वाले तथा दोनों अक्षों को स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण है –  
 (A)  $x^2+y^2-6x+6y+9=0$  (B)  $x^2+y^2+6x-6y+9=0$   
 (C)  $x^2+y^2+30x-30y+225=0$  (D)  $x^2+y^2-30x+30y+225=0$
27. सरल रेखा  $2x+y=4$  के प्रत्येक बिन्दु से  $x^2+y^2=1$  पर खींचे गये स्पर्श रेखा युग्म की स्पर्श जीवाएँ जिस बिन्दु से गुजरती हैं, वह है –  
 (A) (1,2) (B)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$  (C) (2,4) (D) इनमें से कोई नहीं

1-B(विषयात्मक प्रश्न)

1. बिन्दुओं (1,0), (-1,0) और (0,1) से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।
2. a भुजा वाला एक वर्ग ABCD है। भुजा AB और AD को अक्ष लेते हुए सिद्ध कीजिए कि वर्ग के परिवृत्त की समीकरण  $x^2+y^2=a(x+y)$
3. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूलबिन्दु से गुजरता है तथा अक्षों पर क्रमशः 3 और 4 लम्बाई के अन्तः खण्ड काटता है।
4. बिन्दुओं (1,-2) और (3,-4) से गुजरने वाले तथा x अक्ष को स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।
5. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x अक्ष को मूलबिन्दु से 3 इकाई दूरी पर स्पर्श करता है और y अक्ष पर 6 इकाई का अन्तः खण्ड काटता है।
6. वृत्त  $x=-3+2\sin\theta, y=4+2\cos\theta$  की कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए।
7. वृत्त  $3x^2+3y^2-29x-19y+56=0$  तथा सरल रेखा  $x-y+2=0$  के प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए। प्रतिच्छेदन से प्राप्त जीवा की लम्बाई भी ज्ञात कीजिए।
8. प्रदर्शित कीजिए कि सरल रेखा  $7y-x=5$  वृत्त  $x^2+y^2-5x+5y=0$  को स्पर्श करती है तथा इसके समान्तर अन्य स्पर्श रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए।
9. वृत्त  $x^2+y^2=4$  की उस स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो कि x अक्ष से  $60^\circ$  का कोण बनाती है।
10. बिन्दु (1,2) पर वृत्त  $x^2+y^2=5$  के अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए।
11. प्रदर्शित कीजिए कि बिन्दु (9,0) से वृत्त  $x^2+y^2=16$  पर दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती है। इस स्पर्श रेखा युग्म की समीकरण और उनके मध्य कोण भी ज्ञात कीजिए।
12. यदि बिन्दु (f,g) से वृत्त  $x^2+y^2=6$  पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई, बिन्दु (f,g) से वृत्त  $x^2+y^2+3x+3y=0$  पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई दुगुनी हो, तो  $f^2+g^2+4f+4g+2=0$  सत्य है अथवा असत्य?
13. वृत्त  $(x+4)^2+y^2=8$  के नियामक वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।
14. वृत्त  $x^2+y^2=12$  के उन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाएँ खींची जाती है जहाँ पर यह वृत्त  $x^2+y^2-5x+3y-2=0$  से मिलता है, तो इन स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए।
15. बिन्दु (h,k) से वृत्त  $x^2+y^2=a^2$  पर स्पर्श रेखाएँ खींची जाती है। सिद्ध कीजिए कि स्पर्श रेखाओं तथा स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाली सरल रेखा से निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल  $\frac{a(h^2+k^2-a^2)^{3/2}}{h^2+k^2}$  होता है।
16. वृत्त  $x^2+y^2-4x-6y+5=0$  के सापेक्ष बिन्दु (-2,3) की ध्रुवी ज्ञात कीजिए।
17. सिद्ध कीजिए कि वृत्त  $x^2+y^2+6y+5=0$  और  $x^2+y^2+2x+8y+5=0$  के सापेक्ष बिन्दु (1,-2) की ध्रुवियाँ संपाती होती है। यह भी सिद्ध कीजिए कि एक ऐसा बिन्दु और भी विद्यमान है, जिससे इन वृत्तों के सापेक्ष ध्रुवियाँ एक समान होती है। इस बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।
18. वृत्त  $x^2+y^2+6x+8y+9=0$  की उस जीवा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका मध्य बिन्दु (-2,-3) है।
19. वृत्तों  $x^2+y^2-2x-6y+9=0$  एवं  $x^2+y^2+6x-2y+1=0$  की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

20. सिद्ध कीजिए कि वृत्त  $x^2+y^2-2x-6y-12=0$  और  $x^2+y^2+6x+4y-6=0$  एक दूसरे को लम्बकोणीय प्रतिच्छेद करते हैं।
21. उस वृत्तों का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से गुजरता है तथा वृत्तों  $x^2+y^2-4x+6y+10=0$  और  $x^2+y^2+12y+6=0$  को समकोण पर काटता है।
22. तीन वृत्तों  $x^2+y^2-16x+60=0$ ,  $3x^2+3y^2-36x+81=0$  और  $x^2+y^2-16x-12y+84=0$  हैं, तो ज्ञात कीजिए  
 (1) उस बिन्दु के निर्देशांक जिससे इन वृत्तों पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयों परस्पर बराबर हों।  
 (2) इन स्पर्श रेखाओं की लम्बाई।
23. सरल रेखाओं  $x+y=6$ ,  $2x+y=4$  और  $x+2y=5$  से निर्मित त्रिभुज के परिवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।
24. यदि  $y=2x$  वृत्त  $x^2+y^2-10x=0$  की जीवा हो, तो उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके लिए यह जीवा व्यास है।

## EXERCISE – 2

### 2-A(बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. यदि 4 इकाई त्रिज्या के वृत्त पर 4 भिन्न बिन्दु  $\left(a, \frac{1}{a}\right), \left(b, \frac{1}{b}\right), \left(c, \frac{1}{c}\right)$  और  $\left(d, \frac{1}{d}\right)$  हो, तो  $abcd$  बराबर है :  
 (A) 4 (B) 16 (C) 1 (D) इनमें से कोई नहीं।
2. वृत्त  $x^2+4x+(y-3)^2=0$  पर बिन्दु A (0,3) से एक जीवा AB खींची जाती है तथा इसे बिन्दु M तक इस प्रकार बढ़ाया जाता है कि  $AM=2AB$  हो, तो M के बिन्दुपथ का समीकरण है :  
 (A)  $x^2+8x+y^2=0$  (B)  $x^2+8x+(y-3)^2=0$   
 (C)  $(x-3)^2+8x+y^2=0$  (D)  $x^2+8x+8y^2=0$
3. दो पतली छड़ें AB और CD जिनकी लम्बाई  $2a$  और  $2b$  है क्रमशः OX और OY अक्षों के अनुदिश गतिशील है। जहाँ 'O' मूलबिन्दु है, तो दोनों छड़ों के सिरों से गुजरने वाले वृत्त के केन्द्र का बिन्दु होगा  
 (A)  $x^2+y^2=a^2+b^2$  (B)  $x^2-y^2=a^2-b^2$  (C)  $x^2+y^2=a^2-b^2$  (D)  $x^2-y^2=a^2+b^2$
4. वृत्त  $x^2+y^2-12x-4y+30=0$  पर मूलबिन्दु से सबसे अधिक दूरी पर स्थित बिन्दु के निर्देशांक होंगे—  
 (A) (9, 3) (B) (8, 5) (C) (12, 4) (D) इनमें से कोई नहीं।
5. 'c' का वह मान जिसके लिए समुच्चय  
 $\{(x,y) | x^2+y^2+2x \leq 1\} \cap \{(x,y) | x-y+c \geq 0\}$  केवल एक उभयनिष्ठ बिन्दु रखता है —  
 (A)  $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$  (B)  $\{-1, 3\}$  (C)  $\{-3\}$  (D)  $\{-1\}$
6. माना x और y वास्तविक संख्याएँ समीकरण  $x^2-4x+y^2+3=0$  को सन्तुष्ट करती है। यदि  $x^2+y^2$  अधिकतम और M और m हैं, तो M-m का संसख्यात्मक मान है :  
 (A) 2 (B) 8 (C) 15 (D) इनमें से कोई नहीं
7. बिन्दु (4, 3) से वृत्त  $x^2+y^2=9$  पर खींची गई स्पर्श रेखाओं और उनके स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाली जीवा से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल है :  
 (A)  $\frac{192}{25}$  (B) 192 (C) 25 (D) 250

8. मूलबिन्दु और बिन्दु  $(g, f)$  से वृत्त  $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$  पर खींची गए स्पर्शी युग्म की स्पर्श जीवाओं के बीच की दूरी है –  
 (A)  $\sqrt{g^2+f^2}$  (B)  $\frac{\sqrt{g^2+f^2-c}}{2}$  (C)  $\frac{g^2+f^2-c}{2\sqrt{g^2+f^2}}$  (D)  $\frac{\sqrt{g^2+f^2+c}}{2\sqrt{g^2+f^2}}$
9. एक वृत्त बिन्दु  $\left(3, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$  से गुजरता है तथा सरल रेखा युग्म  $x^2-y^2-2x+1=0$  को स्पर्श करता है, तो वृत्त के केन्द्र के निर्देशांक हैं :  
 (A) (4, 0) (B) (5, 0) (C) (6, 0) (D) (0, 4)
10. यदि बिन्दु  $(1, 2)$  पर वृत्त  $C_1: x^2+y^2=5$  की स्पर्श रेखा, वृत्त  $C_2: x^2+y^2=9$  को बिन्दु A और B पर काटती है तथा द्वितीय वृत्त के बिन्दु A और B पर स्पर्श रेखाएँ बिन्दु C पर मिलती हैं, तो C के निर्देशांक हैं –  
 (A) (4, 5) (B)  $\left(\frac{9}{15}, \frac{18}{5}\right)$  (C) (4, -5) (D)  $\left(\frac{9}{5}, \frac{18}{5}\right)$
11. एक बिन्दु  $A(2, 1)$  वृत्त  $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$  के बाहर स्थित है तथा AP एवं AQ वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। त्रिभुज APQ के परिवृत्त का समीकरण है—  
 (A)  $(x+g)(x-2)+(y+f)(y-1)=0$  (B)  $(x+g)(x-2)-(y+f)(y-1)=0$   
 (C)  $(x-g)(x+2)+(y-f)(y+1)=0$  (D) इनमें से कोई नहीं
12. वृत्त  $x^2+y^2+4x-6y-12=0$  की जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ, जो इसकी परिधि पर  $\frac{\pi}{3}$  रेडियन का कोण बनाती है :  
 (A)  $(x-2)^2+(y+3)^2=6.25$  (B)  $(x+2)^2+(y-3)^2=6.25$   
 (C)  $(x+2)^2+(y-3)^2=18.75$  (D)  $(x+2)^2+(y+3)^2=18.75$
13. वृत्तों के केन्द्रों का बिन्दुपथ जबकि बिन्दु  $(2, 3)$  जीवा  $5x+2y=16$  का मध्य बिन्दु है –  
 (A)  $2x-5y+11=0$  (B)  $2x+5y-11=0$  (C)  $2x+5y+11=0$  (D) इनमें से कोई नहीं
14. यदि वृत्त  $C_1: x^2+y^2=16$ , 5 इकाई त्रिज्या के दूसरे वृत्त  $C_2$  को इस प्रकार प्रतिच्छेद करता है कि इनकी उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई अधिकतम तथा प्रवणता  $\frac{3}{4}$  हो, तो  $C_2$  के केन्द्र के निर्देशांक हैं :  
 (A)  $\left(\pm \frac{9}{5}, \pm \frac{12}{5}\right)$  (B)  $\left(\pm \frac{9}{5}, \mp \frac{12}{5}\right)$  (C)  $\left(\pm \frac{12}{5}, \pm \frac{9}{5}\right)$  (D)  $\left(\pm \frac{12}{5}, \mp \frac{9}{5}\right)$
15. यदि वृत्त  $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$  पर स्थित किसी बिन्दु P से वृत्त  $x^2+y^2+2gx+2fy+c \sin^2\alpha+(g^2+f^2)\cos^2\alpha=0$  पर स्पर्श रेखाएँ खींची जाती हो, तो स्पर्श रेखाओं के मध्य कोण है :  
 (A)  $\alpha$  (B)  $2\alpha$  (C)  $\frac{\alpha}{2}$  (D) इनमें से कोई नहीं
16. यदि दो वृत्तों की उभयनिष्ठ आन्तरिक स्पर्श रेखाओं की लम्बाई 7 और उभयनिष्ठ बाह्य स्पर्श रेखा की लम्बाई 11 है, तो दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं का गुणनफल है :  
 (A) 36 (B) 9 (C) 18 (D) 4
17. यदि दो वृत्त  $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y=0$  एवं  $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y=0$  एक दूसरे को स्पर्श करते हैं, तो :  
 (A)  $f_1g_1=f_2g_2$  (B)  $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$  (C)  $f_1f_2 = g_1g_2$  (D) इनमें से कोई नहीं

18. दो वृत्त जिनकी त्रिज्याएँ 4 और 8 हैं, समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं। उनकी उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई है :  
 (A)  $\frac{16}{\sqrt{5}}$  (B) 8 (C)  $4\sqrt{6}$  (D)  $\frac{8\sqrt{5}}{5}$
19. एक वृत्त सरल रेखा  $lx+my+n=0$  को स्पर्श करता है तथा वृत्त  $x^2+y^2=9$  को लम्बकोणीय काटता है, तो इसके केन्द्र का बिन्दु पथ है –  
 (A)  $(lx+my+n)^2=(l^2+m^2)(x^2+y^2-9)$  (B)  $(lx+my-n)^2=(l^2+m^2)(x^2+y^2-9)$   
 (C)  $(lx+my+n)^2=(l^2+m^2)(x^2+y^2+9)$  (D) इनमें से कोई नहीं
20. यदि कोई वृत्त (a,b) से गुजरता हो और वृत्त  $x^2+y^2=K^2$  को लम्बकोणीय काटता हो, तो इसके केन्द्र का बिन्दुपथ है :  
 (A)  $2ax+2by-(a^2+b^2+K^2)=0$  (B)  $2ax+2by-(a^2-b^2+K^2)=0$   
 (C)  $x^2+y^2-3ax-4by+(a^2+b^2-K^2)=0$  (D)  $x^2+y^2-2ax-3by+(a^2-b^2-K^2)=0$
21. यदि वृत्त  $x^2+y^2=4$  एक अन्य वृत्त  $x^2+y^2+2x+3y-5=0$  को बिन्दु A एवं B पर काटता है, तो AB व्यास वाले वृत्त का समीकरण है :  
 (A)  $13(x^2+y^2)-4x-6y-50=0$  (B)  $9(x^2+y^2)+8x-4y+25=0$   
 (C)  $x^2+y^2-5x+2y+72=0$  (D) इनमें से कोई नहीं
22. वृत्त  $15x^2+15y^2-48x+64y=0$  के किसी बिन्दु से दो वृत्त  $5x^2+5y^2-24x+32y+75=0$  और  $5x^2+5y^2-48x+64y+300=0$  पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाईयों का अनुपात है  
 (A) 1:2 (B) 2:3 (C) 3:4 (D) इनमें से कोई नहीं
23. वृत्त के बिन्दु (3, 4) पर अभिलम्ब वृत्त का समीकरण है –  
 (A)  $x^2+y^2+2x-2y-13=0$  (B)  $x^2+y^2-2x-2y-11=0$   
 (C)  $x^2+y^2-2x+2y+12=0$  (D)  $x^2+y^2-2x-2y+14=0$

-----  
**एक से अधिक विकल्प सही**

24. वृत्त  $x^2+y^2-2x-3ky-2=0$  दो स्थिर बिन्दुओं से गुजरता है, हैं –  
 (A)  $(1+\sqrt{3},0)$  (B)  $(-1+\sqrt{3},0)$  (C)  $(-\sqrt{3}-1,0)$  (D)  $(1-\sqrt{3},0)$
25. प्रथम चतुर्थांश में दोनों अक्षों तथा सरल रेखा  $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$  को स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण  $(x-c)^2+(y-c)^2=c^2$  है जहाँ c का मान है –  
 (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6

.....  
**2-B(विषयात्मक प्रश्न)**  
 .....

1. बिन्दुओं (1,0) और (3,0) को मिलाने वाले रेखाखण्ड पर समबाहु त्रिभुज बनाया जाता है जिसका शीर्ष चतुर्थांश में है। इसकी भुजाओं को वयास मानकर खींचे गये वृत्तों की समीकरणों ज्ञात कीजिए।

2. आयत ABCD के परिवृत्त का एक व्यास  $4y=x+7$  है। यदि बिन्दु A और B क्रमशः  $(-3,4)$  और  $(5,4)$  हो, तो आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. एक चर वृत्त बिन्दु  $A(a,b)$  से गुजरता है तथा x- अक्ष को स्पर्श करता है। प्रदर्शित कीजिए कि A से गुजरने वाले व्यास के दूसरे सिरे का बिन्दुपथ  $(x-a)^2=4by$  है।
4. माना वृत्त  $x^2+y^2-2x-4y-20=0$  का केन्द्र A है। माना वृत्त के बिन्दुओं B  $(1,7)$  तथा D  $(4,-2)$  पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ बिन्दु C पर मिलती हैं, तो चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. सरल रेखाओं  $x-2y-5=0$  और  $7x+y=50$  के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरने वाली उन सरल रेखाओं का समीकरण ज्ञात करो जो वृत्त  $x^2+y^2=100$  की परिधि को दो चापों जिनकी लम्बाइयों के अनुपात 2 : 1 है, में विभाजित करता है।
6. स्थिर बिन्दु  $(h,k)$  से वृत्त  $x^2+y^2=r^2$  पर जीवाएँ खींची जाती हैं। प्रदर्शित कीजिए कि वृत्त द्वारा बनी जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ  $x^2+y^2=hx+ky$  होता है।
7. माना कि वृत्त का समीकरण  $2x(x-a)+y(2y-b)=0, (a \neq 0, b \neq 0)$  है यदि बिन्दु  $\left(a, \frac{b}{2}\right)$  से वृत्त पर दो जीवाएँ खींची जाएं जो x- अक्ष द्वारा समद्विभाजित होती होती हों तो a एवं b पर प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए।
8. वृत्तों  $x^2+y^2=25$  और  $(x-12)^2+y^2=9$  की चार उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ ज्ञात कीजिए।
9. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करो जो वृत्तों  $x^2+y^2=4$ ,  $x^2+y^2-6x-8y+10=0$  और  $x^2+y^2+2x-4y-2=0$  को बिन्दु  $(2, 3)$  पर स्पर्श करता है।
10. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु  $(1,1)$  से गुजरता है तथा वृत्त  $x^2+y^2+4x-6y-3=0$  को बिन्दु  $(2,3)$  पर स्पर्श करता है।
11. जीवा  $x-y+1=0$  द्वारा वृत्त  $x^2+y^2-2x-2y-8=0$  को विभाजित करने पर बनने वाले बड़े भाग (Larger segment) में बिन्दु  $(2a, a+1)$  के होने के लिए a के मान ज्ञात कीजिए।
12. यदि  $4l^2-5m^2+6l+1=0$  तो सिद्ध कीजिए कि  $lx+my+1=0$  एक वृत्त को स्पर्श करती है। इस वृत्त का केन्द्र एवं त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
13. वृत्त  $x^2+y^2=4$  की जीवा के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जबकि जीवा द्वारा वक्र  $x^2-2x-2y=0$  पर काटा गया अन्तः खण्ड मूलबिन्दु पर समकोण बनाता है।
14. एक वृत्त सरल रेखा  $y=x$  को बिन्दु P पर इस प्रकार स्पर्श करता है कि  $OP = 4\sqrt{2}$ , जहाँ O मूलबिन्दु है।  $(-10,2)$  वृत्त के अन्दर कोई बिन्दु है तथा सरल रेखा  $x+y=0$  पर वृत्त की जीवा की लम्बाई  $6\sqrt{2}$  है। वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।
15. प्रदर्शित कीजिए कि वृत्त  $x^2+y^2=a^2$  की परिधि पर स्थित किसी बिन्दु  $(x_1, y_1)$  से वृत्त पर समान दूरी d पर स्थित दो बिन्दुओं के गुजरने वाली सरल रेखा का समीकरण  $xx_1 + yy_1 - a^2 + \frac{d^2}{2} = 0$  है।

## Exercise – 3

### 3-A(स्तम्भ मिलान)

- | 1. स्तम्भ- I  | स्तम्भ- II |
|---|------------|
| (A) a के उन मानों की संख्या जिनके लिए वृत्तों $x^2+y^2=8$ तथा $(x-a)^2+y^2=8$ की उभयनिष्ठ जीवा मूल बिन्दु पर समकोण अन्तरिक करती है—   | (p) 4      |
| (B) यदि वृत्त $(x-1)^2+y^2=4$ की एक जीवा रेखा $y = 22\sqrt{3}(x-1)$ वे अनुदिष्ट हो, तो जीवा की लम्बाई है —  | (q) 2      |
| (C) सभी तीन रेखाओं $3x+7y=2$ , $21x+49y=5$ तथा $9x+21y=0$ को स्पर्श करने वाले वृत्तों की संख्या है —  | (r) 0      |
| (D) यदि बिन्दु $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$ से गुजरने वाले वृत्त $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}y - 2 = 0$ को स्पर्श करने वाले सबसे छोटे तथा सबसे बड़े वृत्त की त्रिज्याएँ क्रमशः $r_1$ तथा $r_2$ हो, तो $r_1$ तथा $r_2$ का माध्य है — | (s) 1      |
- 
- | 2. स्तम्भ - I   | स्तम्भ - II |
|---|-------------|
| (A) वृत्तों $x^2+y^2-2x=0$ तथा $x^2+y^2+6x-6y+2=0$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या है —       | (p) 1       |
| (B) $x^2+y^2-4x-10y+4=0$ तथा $x^2+y^2-6x-12y-55=0$ तिर्यक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या है —   | (q) 2       |
| (C) $x^2+y^2-2x-4y=0$ तथा $x^2+y^2-8y-4=0$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या है —               | (r) 0       |
| (D) $x^2+y^2+2x-8y+13=0$ तथा $x^2+y^2-6x-2y+6=0$ की अनुक्रम उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या है — | (s) 0       |

.....  
**3-B(कथन/कारण)**  
 .....

3. **कथन-1** : बिन्दुओं A(3,5), B(4,6), C(5,7) से गुजरने वाले वृत्तों की संख्या 1 है।  
**कथन-2** : एक समतल में स्थित तीन असंरेखीय बिन्दुओं से केवल और केवल एक वृत्त खींचा जा सकता है।
- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।  
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।  
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है ;  
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है
4. **कथन-1** : वृत्त  $x^2+y^2-2x-2y=0$  द्वारा x अक्ष पर बनाए गए अन्तः खण्ड की लम्बाई 2 है।  
**कथन-2** :  $x^2+y^2-\alpha x-\beta y=0$  मूलबिन्दु से गुजरने वाला एक वृत्त है जिसका केन्द्र  $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$  और त्रिज्या  $\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$  है।
- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।  
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।



- (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है ;  
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है

5. **कथन-1** : यदि तीन वृत्त, जो इस प्रकार है कि उनके केन्द्र असंरेखीय है, तो ठीक एक वृत्त संभव है जो तीनों वृत्तों को लम्बकोणीय प्रतिच्छेद करता है।

**कथन-2** : दो प्रतिच्छेदित वृत्तों की मूलाक्ष उनकी उभयनिष्ठ जीवा होती है।

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।  
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।  
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है ;  
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है

6. **कथन-1** : यदि रेखा  $L=0$  वृत्त  $S=0$  की स्पर्श रेखा है, तो यह वृत्त  $S+\lambda L=0$  की भी स्पर्श रेखा होगी।

**कथन-2** : यदि एक रेखा वृत्त को स्पर्श करती है, तो रेखा की वृत्त के केन्द्र से लम्बवत् दूरी त्रिज्या के बराबर होती है।

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।  
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।  
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है ;  
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है

.....  
**3-C(अनुच्छेद)**  
 .....

17. **अनुच्छेद**

माना कि वृत्त  $S_1, S_2$  तथा  $S_3$  क्रमशः  $x^2+y^2=4, x^2+y^2-6x+5=0$  एवं  $x^2+y^2-4y-5=0$  है, तो

7.1 बिन्दु (2, 2) स्थित है –

- (A) केवल वृत्त  $S_1$  के अन्दर (B) केवल वृत्त  $S_2$  के अन्दर  
 (C) केवल वृत्त  $S_3$  के अन्दर (D) वृत्त  $S_1$  तथा  $S_2$  के अन्दर लेकिन  $S_3$  के अन्दर नहीं

7.2 बिन्दु (1, 2) स्थित है –

- (A) वृत्त  $S_2$  तथा  $S_3$  के अन्दर लेकिन  $S_1$  के अन्दर नहीं (B) वृत्त  $S_2$  तथा  $S_1$  के अन्दर लेकिन  $S_3$  के अन्दर नहीं  
 (C) वृत्त  $S_3$  के अन्दर लेकिन  $S_2$  तथा  $S_1$  के अन्दर नहीं (D) वृत्त  $S_1, S_2$  तथा  $S_3$  के अन्दर

7.3 रेखा  $x-y+2\sqrt{2}=0$

- (A)  $S_1$  की स्पर्श रेखा है तथा  $S_2$  एवं  $S_3$  को नहीं मिलती हैं।  
 (B)  $S_1$  की स्पर्श रेखा है,  $S_3$  की जीवा  $S_2$  को नहीं मिलती है।  
 (C)  $S_1$  की स्पर्श रेखा है तथा  $S_2$  एवं  $S_3$  की जीवा है।  
 (D)  $S_3$  की स्पर्श रेखा है तथा  $S_1$  एवं  $S_2$  की जीवा है।

8. अनुच्छेद

माना कि वृत्त  $x^2+y^2-8x-8y+16=0$  तथा  $x^2+y^2+6x+6y+9=0$  है।

8.1 निम्न में से कौनसा सत्य है –

- (A) एक वृत्त दूसरे वृत्त के अन्दर स्थित है। (B) वे एक-दूसरे को प्रतिच्छेदित करते हैं।  
 (C) एक-दूसरे को बाह्य स्पर्ष करते हैं। (D) प्रत्येक वृत्त दूसरे वृत्त के बाहर है।

8.2 अनुक्रम उभयनिष्ठ स्पर्ष रेखाओं की संख्या है –

- (A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 0

8.3 तिर्यक उभयनिष्ठ स्पर्ष रेखाओं की संयुक्त समीकरण है –

- (A)  $(x+y)^2-4=0$  (B)  $xy=0$  (C) विद्यमान नहीं है (D) इनमें से कोई नहीं

3-D(सत्य/असत्य कथन)

9. यदि बिन्दु  $(0, 0)$  से वृत्त  $x^2+y^2-14x+2y+25=0$  पर खींची गई दो स्पर्ष रेखाओं के मध्य कोण  $\alpha$  एवं  $\beta$  हो, तो  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$

10. मूल बिन्दु से वृत्त  $4x^2+4y^2+8x+8y+1=0$  पर खींची गई स्पर्ष रेखा की लम्बाई  $\frac{1}{2}$  है।

11. बिन्दु  $(\lambda, 1+\lambda)$  वृत्त  $x^2+y^2=1$  के अन्दर स्थित है यदि  $\lambda = -\frac{1}{2}$

12. रेखा  $2x-5y+18=0$  पर 6 इकाई लम्बाई की जीवा बनाने वाले वृत्त जिसका केन्द्र  $(3, -1)$  की त्रिज्या  $\sqrt{38}$  होगी

13. वृत्त  $x^2+y^2-6x-2y+9=0$  और  $x^2+y^2=18$  इस प्रकार है कि वे प्रतिच्छेद करते हैं।

3-E(रिक्त स्थान की पूर्ति)

14. वृत्त  $4x^2+4y^2=25$  की प्राचलिक समीकरण ..... है।

15. वृत्त  $x^2+y^2-8x-12y+p=0$  जो ना तो अक्षोिको काटता है न ही स्पर्ष करता है, के सापेक्ष बिन्दु  $(2, 5)$  की शक्ति ऋणात्मक होने के लिए  $p$  के मान होंगे .....

16. बिन्दु  $(4, -1)$  से वृत्त  $2x^2+2y^2=1$  पर खींची गई स्पर्ष रेखा की लम्बाई ..... होगी।

17. वृत्त  $x^2+y^2-4x+3y-1=0$  के सापेक्ष सरल रेखा  $2x+y+12=0$  का ध्रुव ..... होगा।

18. वृत्त  $x^2+y^2=2x$  के उस अभिलम्ब की समीकरण जो सरल रेखा  $x+2y=3$  के समान्तर है।

## Exercise – 4

### 4-A(पूर्ववर्ती JEE परीक्षा प्रश्न)

#### IIT-JEE-2008

1. माना  $a$  व  $b$  शून्येतर (non-zero) वास्तविक संख्याएँ हैं। तब समीकरण  $(ax^2+by^2+c)(x^2-5xy+6y^2)=0$  प्रदर्शित करती है।  
 (A) चार सरल रेखाएँ जब  $c=0$  तथा  $a$  व  $b$  समान चिन्ह के हैं  
 (B) दो सरल रेखाएँ और एक वृत्त, जब  $a=b$  और  $c$  का चिन्ह  $a$  से विपरीत है  
 (C) दो सरल रेखाएँ और एक अतिपरवलय, जब  $b$  व  $c$  का चिन्ह  $a$  के चिन्ह से विपरीत है  
 (D) एक वृत्त और एक दीर्घवृत्त जब  $a$  व  $b$  समान चिन्ह के हैं और  $c$  का चिन्ह  $a$  के चिन्ह से विपरीत है

2. त्रिभुज PQR शीर्ष P से जाने वाली सरल रेखा भुजा QR को S तथा त्रिभुज PQR के परिवृत्त (circumcircle) को T पर प्रतिच्छेद करती है। यदि S परिवृत्त का केन्द्र नहीं है, तब

(A)  $\frac{1}{PS} + \frac{1}{ST} < \frac{2}{\sqrt{QS \times SR}}$

(B)  $\frac{1}{PS} + \frac{1}{ST} > \frac{2}{\sqrt{QS \times SR}}$

(C)  $\frac{1}{PS} + \frac{1}{ST} < \frac{4}{QR}$

(D)  $\frac{1}{PS} + \frac{1}{ST} > \frac{4}{QR}$

3. अनुच्छेद

एक समबाहु त्रिभुज PQR के अन्दर एक अन्तः वृत्त C, जिसकी त्रिज्या 1 है, बनाया गया है। वृत्त C का त्रिभुज PQR कि भुजाओं PQ, QR, RP के स्पर्श क्रमशः D, E, F हैं। रेखा PQ समीकरण  $\sqrt{3}x + y - 6 = 0$  द्वारा दी गई है तथा बिन्दु

$D\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$  है। इसके अतिरिक्त यह दिया है कि मूलबिन्दु और C का केन्द्र, रेखा PQ के एक ही ओर है।

- 3.1 वृत्त C का समीकरण निम्न है

(A)  $(x - 2\sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 1$

(B)  $(x - 2\sqrt{3})^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$

(C)  $(x - \sqrt{3})^2 + (y + 1)^2 = 1$

(D)  $(x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 1$

- 3.2 बिन्दु E तथा F हैं -

(A)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right), (\sqrt{3}, 0)$

(B)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), (\sqrt{3}, 0)$

(C)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(D)  $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

- 3.3 भुजाओं QR और RP के समीकरण निम्न है

(A)  $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x + 1, y = -\frac{2}{\sqrt{3}}x - 1$

(B)  $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x, y = 0$

$$(C) y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1, y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - 1 \quad (D) y = \sqrt{3}x, y = 0$$

4. माना  $L_1 : 2x+3y+p-3=0$   
 $L_2 : 2x+3y+p+3=0$

जहाँ  $p$  एक वास्तविक संख्या है, और  $C : x^2+y^2+6x-10y+30=0$

कथन-1: यदि रेखा  $L_1$  वृत्त  $C$  की जीवा है, तो रेखा  $L_2$  सदैव वृत्त  $C$  का व्यास नहीं है।

और

कथन-2: यदि रेखा  $L_1$  वृत्त  $C$  का व्यास है, तो रेखा  $L_2$  वृत्त  $C$  की जीवा नहीं है।

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।  
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।  
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है ;  
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है

### IIT-JEE-2007

5. बिन्दु  $(17, 7)$  से वृत्त  $x^2+y^2=169$  पर स्पर्श रेखाएँ खींची जाती हैं –

कथन- 1: स्पर्श-रेखाएँ परस्पर लम्बवत हैं।

क्योंकि

कथन 2 : उस बिन्दु का बिन्दुपथ जिससे दिये गये वृत्त पर खींची गई स्पर्श-रेखाएँ परस्पर लम्बवत होती हैं, का समीकरण  $x^2+y^2=338$  है।

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।  
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।  
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है ;  
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है

6. किसी चतुर्भुज ABCD जिसका क्षेत्रफल 18 इकाई है, की भुजा AB, भुजा CD के समांतर हैं और  $AB=2 CD$  माना भुजा AD भुजा AB एवं CD के लम्बवत् है। यदि चतुर्भुज ABCD के अन्दर एक वृत्त इस प्रकार खींचा जाता है कि यह चतुर्भुज की चारों भुजाओं को स्पर्श करता है, तो इस वृत्त की त्रिज्या होगी –

- (A) 3 (B) 2 (C) 3/2 (D) 1

### IIT-JEE-2005

7. एक वृत्त का समीकरण  $x^2+(y-1)^2=1$  है। एक अन्य वृत्त  $C$  इसको बाह्य स्पर्श करता है तथा  $x$ -अक्ष को भी स्पर्श करता है, तो इसके केन्द्र का बिन्दुपथ है –

- (A)  $\{(x, y) : x^2=4y\} \cup \{(x, y) : y \leq 0\}$  (B)  $\{(x, y) : x^2+(y-1)^2=4\} \cup \{(x, y) : y \leq 0\}$   
 (C)  $\{(x, y) : x^2=y\} \cup \{(0, y) : y \leq 0\}$  (D)  $\{(x, y) : x^2=4y\} \cup \{(0, y) : y \leq 0\}$

8. त्रिज्याओं 3, 4 एवं 5 वाले वृत्त एक दूसरे को परस्पर बाह्य स्पर्श करते हैं। यदि इन वृत्तों के स्पर्श बिन्दुओं पर खींची गई स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु  $P$  हो, तो स्पर्श बिन्दुओं से  $P$  की दूरी ज्ञात कीजिए।

9.  $a$  के मानों का अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनके लिए रेखा  $y+x=0$ , बिन्दु  $\left(\frac{1+\sqrt{2a}}{2}, \frac{1-\sqrt{2a}}{2}\right)$  से वृत्त

$$2x^2 + 2y^2 - (1 + \sqrt{2a})x - (1 - \sqrt{2a})y = 0$$

पर खींची गई दो जीवाओं को समद्विभाजित करती है।

### IIT-JEE-2004

10. केन्द्र  $(2, 1)$  का वृत्त जिसकी एक जीवा वृत्त  $x^2+y^2-2x-6y+6=0$  का व्यास है, की त्रिज्या है –

- (A) 3 (B) 2 (C) 3/2 (D)  $\sqrt{1}$   
 11. सरल रेखा  $2x+3y+1=0$  को बिन्दु  $(1, -1)$  पर स्पर्श करने वाले उस वृत्त समीकरण ज्ञात कीजिए तथा उस वृत्त को लम्बकोणीय काटता है जिसका व्यास बिन्दु  $(0, 3)$  तथा  $(-2, -1)$  को मिलाने वाला रेखाखण्ड है।

**IIT-JEE-2002**

12. यदि वृत्त  $x^2+y^2+6x+6y=2$  के बिन्दु P पर वृत्त की स्पर्श रेखा, रेखा  $5x-2y+6=0$  को y-अक्ष पर बिन्दु Q पर मिलती है, तो PQ की लम्बाई है –  
 (A) 4 (B)  $2\sqrt{5}$  (C) 5 (D)  $3\sqrt{5}$
13. यदि  $a>2b>0$  हो, तो रेखा  $y = mx - b\sqrt{1+m^2}$  के वृत्तों  $x^2+y^2=b^2$  एवं  $(x-a)^2+y^2=b^2$  की उभयनिष्ठ स्पर्श होने के लिए m के धनात्मक मान है –  
 (A)  $\frac{2b}{\sqrt{a^2-4b^2}}$  (B)  $\frac{\sqrt{a^2-4b^2}}{2b}$  (C)  $\frac{2b}{a-2b}$  (D)  $\frac{b}{a-2b}$

**IIT-JEE-2001**

14. माना r त्रिज्या के वृत्त के व्यासके शीर्ष पर स्पर्श रेखाएँ PQ एवं RS है। यदि PS एवं RQ वृत्त की परिधि पर बिन्दु X पर प्रतिच्छेद करती है, तो 2r बराबर है –  
 (A)  $\sqrt{PQ \cdot RS}$  (B)  $\frac{PQ+RS}{2}$  (C)  $\frac{2PQ+RS}{PQ+RS}$  (D)  $\frac{\sqrt{PQ^2+RS^2}}{2}$
15. यदि वृत्त  $x^2+y^2=r^2$  की एक जीवा AB केन्द्र पर समकोण बनाती है, तो त्रिभुज PAB के केन्द्रक का बिन्दुपथ जबकि P वृत्त पर गति करता है, होगा –  
 (A) परवलय (B) वृत्त (C) दीर्घवृत्त (D) सरल रेखा युग्म
16. मानाकि  $2x^2+y^2-3xy=0$  ऐसे स्पर्शी युग्म का समीकरण है जो मूल बिन्दु O से उस वृत्त पर खींचा जाता है जिसकी त्रिज्या 3 है तथा केन्द्र प्रथम चतुर्थांश में है। यदि A यदि स्पर्श बिन्दु OA की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

**IIT-JEE-2000**

17. वृत्त  $x^2+y^2=25$  के अन्दर त्रिभुज PQR बनाया जाता है। यदि Q एवं R के निर्देशांक क्रमशः  $(3, 4)$  एवं  $(-4, 3)$  हो, तो  $\angle QPR$  बराबर है –  
 (A)  $\frac{\pi}{2}$  (B)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $\frac{\pi}{4}$  (D)  $\frac{\pi}{6}$
18. यदि वृत्त  $x^2+y^2+2x+2ky+6=0$  एवं वृत्त  $x^2+y^2+2ky+k=0$  लाम्बिक प्रतिच्छेद करते हों, तो k का मान है –  
 (A) 2 or  $-\frac{3}{2}$  (B) -2 or  $-\frac{3}{2}$  (C) 2 or  $\frac{3}{2}$  (D) -2 or  $\frac{3}{2}$

**IIT-JEE-1999**

19. किसी बिन्दु  $(p,q)$  से वृत्त  $x^2+y^2=px+q$  (जहाँ  $pq \neq 0$ ), पर दो भिन्न जीवाएँ खींची जाती है, जो x-अक्ष पर समद्विभाजित होती है, तब –  
 (A)  $p^2=q^2$  (B)  $p^2=8q^2$  (C)  $p^2<8q^2$  (D)  $p^2>8q^2$
20. माना  $L_1$  मूलबिन्दु से गुजरने वाली सरल रेखा है तथा  $L_2$  सरल रेखा  $x+y=1$  है। यदि वृत्त  $x^2+y^2-x+3y=0$  द्वारा रेखा  $L_1$  एवं  $L_2$

पर काटे गये अन्तः खण्ड समान हो, तो निम्न में से कौनसी समीकरण  $L_1$  को प्रदर्शित करती है ?

- (A)  $x+y=0$  (B)  $x-y=0$  (C)  $x+7y=0$  (D)  $x-7y=0$
21. माना बिन्दु  $(-2, 0)$  से वृत्त  $C: x^2+y^2=1$  पर दो स्पर्श रेखाएँ  $T_1$  एवं  $T_2$  खींची जाती हैं। उन वृत्तों को ज्ञात कीजिए जो  $C$  को स्पर्श करते हो एवं उनकी स्पर्श रेखाओं का युग्म  $T_1, T_2$  हो। इन वृत्तों की सभी संभावित उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जबकि दो वृत्तों को एक साथ लिया जाए।

### IIT-JEE-1998

22. वृत्तों  $x^2+y^2=4$  एवं  $x^2+y^2-6x-8y=24$  की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या हैं।  
 (A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 4
23. दो संकेन्द्रीय वृत्त  $C_1$  एवं  $C_2$  है। वृत्त  $C_2$  की त्रिज्या वृत्त  $C_1$  की त्रिज्या की दो गुनी है।  $C_2$  के बिन्दु  $P$  से वृत्त  $C_1$  पर दो स्पर्श रेखाएँ  $PA$  एवं  $PB$  खींची जाती हैं। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज  $PAB$  का केन्द्रक वृत्त  $C_1$  पर स्थित हैं।

### IIT- JEE- 1997

24. समबाहु त्रिभुज के दो शीर्ष  $(-1,0)$  एवं  $(1,0)$  है तथा इसका तृतीय शीर्ष  $x$ - अक्ष के उपर है। इस त्रिभुज के परिवृत्त की समीकरण ----- हैं।
25. सरल रेखा  $2x+y=4$  पर स्थित प्रत्येक बिन्दु से वृत्त  $x^2+y^2=1$  पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की स्पर्शी जीवा बिन्दु ..... से गुजरती है।
26. प्रत्येक प्राकृत संख्या  $k$  के लिए माना  $C_k, k$  सेमी. त्रिज्या के वृत्त को प्रदर्शित करता है जिसका केन्द्र मूलबिन्दु है। वृत्त  $C_k$  पर  $\alpha$ - कण  $k$  सेमी. दूरी तक दक्षिणावर्त दिशा में गति करता है।  $C_k$  पर इसकी गति के बाद, कण  $C_{k+1}$  पर त्रिज्या दिशा में गति करता है। इसी तरह कण गति करता रहता है। कण  $(1, 0)$  से शुरू होता है। यदि कण प्रथम बार  $x$ -अक्ष की धनात्मक दिशा को वृत्त  $C_n$  पर पार करता हो, तो  $n=.....$  .
27. माना वृत्त  $C$  का केन्द्र  $(0, \sqrt{2})$  है। सिद्ध कीजिए कि वृत्त  $C$  पर अधिक से अधिक दो परिमेय बिन्दु रह सकते हैं। (परिमेय बिन्दु वह बिन्दु है जिसके दोनों निर्देशांक परिमेय संख्या हैं।)
28. माना एक वक्र  $ax^2+2hxy+by^2=1$  है तथा एक बिन्दु  $P$  वक्र पर नहीं है। बिन्दु  $P$  से एक रेखा खींची जाती है जो वक्र को  $O$  तथा  $R$  पर प्रतिच्छेद करती है। यदि गुणनफल  $PQ \cdot QR$  रेखा की प्रवणता से स्वतन्त्र है तब दर्शाइए कि वक्र एक वृत्त है।

### IIT- JEE- 1996

29. एक बिन्दु  $P$  से वृत्त  $x^2+y^2+4x-6y+9 \sin^2\alpha+13 \cos^2\alpha=0$  पर खींची गई स्पर्शी रेखाओं के युग्म के मध्य कोण  $2\alpha$  है, तब बिन्दु  $P$  के बिन्दुपथ का समीकरण है –  
 (A)  $x^2+y^2+4x-6y+4=0$  (B)  $x^2+y^2+4x-6y-9=0$   
 (C)  $x^2+y^2+4x-6y+4=0$  (D)  $x^2+y^2+4x-6y+9=0$
30. एक वृत्त जिसका व्यास रेखा खण्ड  $AC$  है, बिन्दुओं  $A, B$  तथा  $C$  से गुजरता है। एक रेखा जो बिन्दु  $A$  से गुजरती है, जीवा  $BC$  को बिन्दु  $D$  पर वृत्त के अन्दर प्रतिच्छेद करती है। यदि कोण  $DAB$  तथा  $CAB$  क्रमशः  $\alpha$  तथा  $\beta$  है और बिन्दु  $P$  तथा रेखा

युग्म DC के मध्य बिन्दु की दूरी  $d$  है तब सिद्ध करो कि वृत्त का क्षेत्रफल  $\frac{\pi d^2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\beta - \alpha)}$  है

4-B(पूर्ववर्ती AIEEE/DCE परीक्षा प्रश्न)

31. माना एक वृत्त निकाय जो कि वृत्त  $(-1, 1)$  से गुजरता है तथा  $x$ -अक्ष को स्पर्श करता है। यदि  $(h, k)$  वृत्तों के केन्द्र के निर्देशांक है, तब  $k$  के मानों का समुच्चय दिया जाता है –  
 (A)  $0 < k < \frac{1}{2}$  (B)  $k \geq \frac{1}{2}$  (C)  $-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$  (D)  $k \leq \frac{1}{2}$
32. यदि रेखाओं  $3x-4y-7=0$  तथा  $2x-3y-5=0$ ,  $49\pi$  वर्ग इकाई वाले वृत्त के दो व्यास हो, तब वृत्त का समीकरण है।  
 (A)  $x^2+y^2+2x-2y-62=0$  (B)  $x^2+y^2-2x+2y-62=0$   
 (C)  $x^2+y^2-2x+2y-47=0$  (D)  $x^2+y^2+2x-2y-47=0$
33. माना C एक वृत्त है जिसका केन्द्र  $(0, 0)$  तथा त्रिज्या 3 इकाई है। वृत्त C की जीवा जो केन्द्र पर  $\frac{2\pi}{3}$  कोण अन्तरिक करता है, के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ होगा –  
 (A)  $x^2+y^2=1$  (B)  $x^2+y^2=\frac{27}{4}$  (C)  $x^2+y^2=\frac{9}{4}$  (D)  $x^2+y^2=\frac{3}{2}$
34. यदि वृत्त  $x^2+y^2+2ax+cy+a=0$  और  $x^2+y^2-3ax+dy-1=0$  एक दूसरे को दो भिन्न बिन्दु P तथा Q पर प्रतिच्छेद करते हैं, तब रेखा  $5x+by-a=0$  बिन्दु P तथा Q से गुजरती है –  
 (A)  $a$  के ठीक दो मानों के लिए (B)  $a$  के कई अनन्त मानों के लिए  
 (C)  $a$  के किसी भी मान (D)  $a$  के ठीक एक मान के लिए
35. यदि वृत्त  $x$ -अक्ष को स्पर्श करता है। यह वृत्त अन्य वृत्त जिसका केन्द्र  $(0, 3)$  तथा त्रिज्या 2 है, को भी स्पर्श करता है। वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ है –  
 (A) एक परवलय (B) एक अतिपरवलय (C) एक वृत्त (D) एक दीर्घवृत्त
36. यदि एक वृत्त बिन्दु  $(a,b)$  से गुजरता है तथा वृत्त  $x^2+y^2=4$  को लम्बकोणीय काटता है तब इसके केन्द्र का बिन्दुपथ है –  
 (A)  $2ax+2by+(a^2+b^2+4)=0$  (B)  $2ax+2by-(a^2+b^2+4)=0$   
 (C)  $2ax-2by+(a^2+b^2+4)=0$  (D)  $2ax-2by-(a^2+b^2+4)=0$
37. एक चर वृत्त एक नियत बिन्दु  $A(p,q)$  से गुजरता है तथा  $x$ -अक्ष को स्पर्श करता है। तब बिन्दु A से गुजरने वाले व्यास के दूसरे सिरे का बिन्दुपथ होगा –  
 (A)  $(x-p)^2=4qy$  (B)  $(x-p)^2=4py$  (C)  $(y-p)^2=4qx$  (D)  $(y-q)^2=4px$
38. यदि रेखाओं  $2x+3y+1=0$  तथा  $3x-y-4=0$ ,  $10\pi$  परिधि वाले वृत्त के अनुदिश व्यास है तब वृत्त का समीकरण है –  
 (A)  $x^2+y^2-2x+2y-23=0$  (B)  $x^2+y^2-2x-2y-23=0$   
 (C)  $x^2+y^2+2x+2y-23=0$  (D)  $x^2+y^2+2x-2y-23=0$
39. रेखा  $y=x$  द्वारा वृत्त  $x^2+y^2-2x=0$  पर अन्तः खण्ड AB है। AB को व्यास मानकर खींचे गए वृत्त का समीकरण है।  
 (A)  $x^2+y^2-x-y=0$  (B)  $x^2+y^2-x+y=0$  (C)  $x^2+y^2+x+y=0$  (D)  $x^2+y^2+x-y=0$

40. यदि दो वृत्त  $(x-1)^2+(y-3)^2=r^2$  तथा  $x^2+y^2-8x+2y+8=0$  दो भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं, तब  
(A)  $2<r<8$  (B)  $r<2$  (C)  $r=2$  (D)  $r>2$
41. वृत्तों का समीकरण जिसका केन्द्र मूल बिन्दु है तथा जो एक समबाहु त्रिभुज जिसकी माध्यिका की लम्बाई  $3a$  है के शीर्ष से गुजरता है, है –  
(A)  $x^2+y^2=a^2$  (B)  $x^2+y^2=4a^2$  (C)  $x^2+y^2=16a^2$  (D)  $x^2+y^2=9a^2$
42. वृत्त  $x^2+y^2=a^2$  के बिन्दु  $(h,h)$  पर स्पर्श रेखा की प्रवणता है –  
(A)  $h$  पर निर्भर करता है। (B)  $-1$  (C)  $1$  (D)  $0$
43. निम्न वृत्तों  $x^2+y^2=6x$ ,  $x^2+y^2+6x+2y+1=0$  पर कितनी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकता है।  
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 1
44. यदि कोई बिन्दु P इस प्रकार गमन करता है कि  $PA-PB, k (k \neq 0)$  के बराबर है तथा A और B हमेशा अचर हैं, तब बिन्दु P का बिन्दुपथ है –  
(A) दीर्घवृत्त (B) अतपरवलय (C) वृत्त (D) इनमें से कोई नहीं
45. वृत्तों  $x^2+y^2=1$  तथा  $x^2+y^2-4x+3=0$  की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या है –  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
46. वृत्त  $x^2+y^2+2x+2ky+6=0$  तथा  $x^2+y^2+2ky+k=0$  लम्बकोणीय काटते हैं, तब  $k$  बराबर है –  
(A) 2 or  $-3/2$  (B)  $-2$  or  $-3/2$  (C) 2 or  $3/2$  (D)  $-2$  or  $3/2$
47. चार भिन्न बिन्दु  $(2k, 3k), (1, 0), (0, 1)$  तथा  $(0, 0)$  वृत्त पर स्थित है।  
(A)  $\forall k \in I$  के लिए (B)  $k < 0$  के लिए  
(C)  $0 < k < 1$  के लिए (D)  $k$  के दो मानों के लिए
- .....
- .....



# Answers

## EXERCISE # 1-A

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. B  
 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. C  
 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. B  
 22. 23. 24. 25. 26. 27.

## EXERCISE # 1-B

1.  $x^2+y^2=1$  3.  $x^2+y^2\pm 3x\pm 4y=0$   
 4.  $x^2+y^2-6x+4y+9=0$  or  
 $x^2+y^2+10x+20y+25=0$   
 5.  $x^2+y^2\pm 6\sqrt{2}y\pm 6x+9=0$   
 6.  $(x+3)^2+(y-4)^2=4$  7. (1,3), (5,7),  $4\sqrt{2}$   
 8.  $x-7y-45=0$  9.  $\sqrt{3}x-y\pm 4=0$   
 10.  $2x-y=0$   
 11.  $16x^2-65y^2-288x+1296=0$ ,  $\tan^{-1}\left(\frac{8\sqrt{65}}{49}\right)$   
 12. Yes 13.  $(x+4)^2+y^2=16$  14.  $\left(6, -\frac{18}{5}\right)$   
 16.  $x=0$  17. (2,-1) 18.  $x+y+5=0$   
 19.  $x=0$ ,  $3x+4y=10$ ,  $y=4$ , and  $3y=4x$   
 21.  $2(x^2+y^2)-7x+2y=0$  22.  $\left(\frac{33}{4}, 2\right); \frac{1}{4}$   
 23.  $x^2+y^2-17x-19y+50=0$   
 24.  $x^2+y^2-2x-4y=0$

## EXERCISE # 2-A

1.	C	2.	B	3.	B	4.	A	5.	D	6.	B	7.	
8.	C	9.	AC	10.	D	11.	A	12.	B	13.	A	14.	
15.	B	16.	C	17.	B	18.	A	19.	A	20.	A	21.	
22.	A	23.	B	24.	AD	25.	AD						

## EXERCISE # 2-B

1.  $x^2+y^2-3x-\sqrt{3}y+2=0$ ;  
 $x^2+y^2-5x-\sqrt{3}y+6=0$ ;  
 $X^2+y^2-4x+3=0$   
 2. 32 sq. unit 4. 75 sq. units  
 5.  $4x-3y-25=0$  OR  $3x+4y-25=0$   
 7. ( $a^2>2b^2$ ) 8.  $2x-\sqrt{5}y-15=0$ ,  
 $2x+\sqrt{5}y-15=0$ ,  
 $x-\sqrt{35}y-30=0$ ,  $x+\sqrt{35}y-30=0$   
 9.  $X^2+y^2-4x-6y-4=0$   
 10.  $X^2+y^2+x-6y+3=0$  11.  $a\in(0,9/5)$   
 12. Centre=(3,0), (radius)= $\sqrt{5}$   
 13.  $X^2+y^2-2x-2y=0$   
 14.  $X^2+y^2+18x-2y+32=0$

## EXERCISE # 3

1. (A)  $\rightarrow$ (q), (B) $\rightarrow$ (p), (C) $\rightarrow$ (r), (D) $\rightarrow$ (s)  
 2. (A)  $\rightarrow$ (r), (B) $\rightarrow$ (s), (C) $\rightarrow$ (p), (D) $\rightarrow$ (q)  
 3. D 4. C 5. B 6. A 7.1 C 7.2 C 7.3 B  
 8.1 D 8.2 B 9. False 11. True  
 12. True 13. False 14.  $x = \frac{5}{2}\cos\theta$ ,  $y = \frac{5}{2}\sin\theta$   
 15. (36,47) 16.  $\sqrt{\frac{33}{2}}$  17. (1,-2)

18.  $x+2y-1=0$

## EXERCISE # 4

1. B 2. BD 3.1 D 3.2 A 3.3 D 4. C 5. A  
 6. B 7. D 8.  $\sqrt{5}$  9.  $(-\infty, -2)\cup(2, \infty)$   
 10. A 11.  $2x^2+2y^2-10x-5y+1=0$  12. C  
 13. A 14. A 15. B 16.  $9+3\sqrt{10}$  17. C 18. A  
 19. D 20. BC  
 21.  $c_1: (x-4)^2+y^2=9$ ;  $c_2: \left(x+\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\frac{1}{9}$   
 common tangent between c &  $c_1: T_1=0$ ;  
 $T_2=0$  and  $x-1=0$ ;  
 common tangent between c &  $c_2: T_1=0$ ;  $T_2=0$   
 and  $x+1=0$ ;  
 common tangent between  $c_1$  &  $c_2$  :  $T_1=0$ ;  $T_2=0$

Download FREE Study Package from [www.TekoClasses.com](http://www.TekoClasses.com) & Learn on Video  
[www.MathsBySuhag.com](http://www.MathsBySuhag.com) Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

and  $y = \pm \frac{5}{\sqrt{39}} \left( x + \frac{4}{5} \right)$

where  $T_1 : x - \sqrt{3}y + 2 = 0$  and

$T_2 : x + \sqrt{3}y + 2 = 0$  22. B

24.  $x^2 + y^2 - \frac{2y}{\sqrt{3}} - 1 = 0$  25. (1/2, 1/4)

26.	7	29.	D	31.	B	32.	C	33.	C	34.	C	35.	A
36.	B	37.	A	38.	A	39.	A	40.	A	41.	A	42.	C
43.	C	44.	C	45.	C	46.	A	47.	D				

## MQB

### EXERCISE # 1 (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. अक्षों को इस प्रकार परिवर्तित किया जाता है कि वृत्त  $x^2+2y^2-5x+2y-5=0$  की नई समीकरण में कोई एक घात का पद नहीं होता है तब नया समीकरण है –  
 (A)  $x^2+y^2=9$  (B)  $x^2+y^2=\frac{49}{4}$  (C)  $x^2+y^2=\frac{81}{16}$  (D)
2. वृत्त का केन्द्र, जो कि बिन्दुओं (0, 0), (1,0) से गुजरता है तथा वृत्त  $x^2+y^2=9$  को स्पर्श करता है, है –  
 (A)  $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$  (B)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$  (C)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  (D)  $\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)$
3. एक रेखा अक्षों को A तथा B पर मिलाती है। त्रिभुज OAB पर परिगत वृत्त बनाया जाता है। यदि वृत्त पर मूल बिन्दु O की स्पर्श रेखा पर बिन्दुओं A तथा B की दूरी क्रमशः  $d_1$  तथा  $d_2$  है, तब वृत्त का व्यास है –  
 (A)  $\frac{2d_1+d_2}{2}$  (B)  $\frac{d_1+2d_2}{2}$  (C)  $d_1+d_2$  (D)  $\frac{d_1d_2}{d_1+d_2}$
4. उस बिन्दु का बिन्दुपथ जिससे दो दिये गए असमान वृत्त, समान कोण अन्तरिक करते है –  
 (A) एक सरल रेखा (B) एक वृत्त (C) एक परवलय (D) कोई नहीं।
5. दो पतली छड़े AB और CD जिनकी लम्बाइयों क्रमशः  $2a$  एवं  $2b$  है, अक्षों OX एवं OY के अनुदिश है जबकि 'O' मूल बिन्दु है। इन छड़ों के अन्त बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्त के केन्द्र के बिन्दुपथ का समीकरण है –  
 (A)  $x^2+y^2=a^2+b^2$  (B)  $x^2-y^2=a^2-b^2$  (C)  $x^2+y^2=a^2-b^2$  (D)  $x^2-y^2=a^2+b^2$
6. दो रेखाएँ  $p_1x+q_1y+r_1=0$  तथा  $p_2x+q_2y+r_2=0$  वृत्त  $x^2+y^2=a^2$  की संयुग्मी रेखायें है, यदि  
 (A)  $p_1p_2+q_1q_2=r_1r_2$  (B)  $p_1p_2+q_1q_2=r_1r_2=0$   
 (C)  $a^2(p_1p_2+q_1q_2)=r_1r_2$  (D)  $p_1p_2+q_1q_2=a^2r_1r_2$
7. मूलबिन्दु से वृत्त  $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$  पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा तथा बिन्दु (g,f) के मध्य की दूरी है –  
 (A)  $\sqrt{g^2+f^2}$  (B)  $\frac{\sqrt{g^2+f^2-c}}{2}$  (C)  $\frac{g^2+f^2-c}{2\sqrt{g^2+f^2}}$  (D)  $\frac{\sqrt{g^2+f^2+c}}{2\sqrt{g^2+f^2}}$
8. वृत्तों  $x^2+y^2-2y-3=0$  तथा  $x^2+y^2-8x-18y+93=0$  को स्पर्श करने वाले सबसे छोटे वृत्त का केन्द्र है –  
 (A) (3,2) (B) (4,4) (C) (2,7) (D) (2,5)
9. एक समचतुर्भुज को दो वृत्तों  $x^2+y^2-4x-12=0$  तथा  $x^2+y^2+4x-12=0$  के उभयनिष्ठ परिक्षेत्र में समाहित किया जाता है जिसके दो शीर्ष वृत्त के केन्द्र को मिलाने वाली रेखा पर स्थित है। समचतुर्भुज का क्षेत्रफल है –  
 (A)  $8\sqrt{3}$  (B)  $4\sqrt{3}$  (C)  $16\sqrt{3}$  (D) कोई नहीं

10. वृत्त  $x^2+y^2=2x$  के केन्द्र की, सरल रेखा जो कि वृत्तों  $x^2+y^2+5x-8y+1=0$ ,  $x^2+y^2-3x+7y-25=0$  के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरती है, दूरी है –  
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) कोई नहीं
11. a का मान जिसके लिये वृत्तों  $c_1 : x^2+y^2=8$  तथा  $c_2 : (x-a)^2+y^2=8$  की उभयनिष्ठ जीवा के केन्द्र पर समकोण अन्तरिक करती है, है –  
 (A)  $\pm\sqrt{2}$  (B)  $\pm 2$  (C)  $\pm 4$  (D) इनमें से कोई नहीं
12. त्रिभुज ABC की भुजाओं को व्यास मानकर खींचे गए वृत्तों का मूलाश्र केन्द्र है –  
 (A)  $\Delta ABC$  का केन्द्रक (B)  $\Delta ABC$  का अन्तः केन्द्र  
 (C)  $\Delta ABC$  का केन्द्रक (D)  $\Delta ABC$  का लम्ब केन्द्र
13. P(a,b) एक बिन्दु है जो प्रथम चतुर्थांश में है। यदि दो वृत्त जो P से गुजरते हैं तथा दोनों अक्षों को स्पर्श करते हैं तथा दोनों वृत्त एक दूसरे को समकोणीय काटते हैं, तब  
 (A)  $a^2-6ab+b^2=0$  (B)  $a^2+2ab-b^2=0$   
 (C)  $a^2-4ab+b^2=0$  (D)  $a^2-8ab+b^2=0$
14. वृत्त का समीकरण जो (1,-3) तथा वृत्तों  $x^2+y^2-6x+8y-16=0$ ,  $x^2+y^2+4x-2y-8=0$  के उभयनिष्ठ बिन्दुओं से गुजरता है –  
 (A)  $x^2+y^2-4x+6y+24=0$  (B)  $2x^2+2y^2+3x+y-20=0$   
 (C)  $3x^2+3y^2-5x+7y-19=20$  (D) कोई नहीं

-----  
 एक से अधिक विकल्प सही

15. कोई वृत्त बिन्दु  $\left(3, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$  से गुजरता है तथा सरल रेखा युग्म  $x^2-y^2-2x+1=0$  को स्पर्श करता है, तो इस वृत्त के केन्द्र के निर्देशांक होंगे –  
 (A) (4,0) (B) (5,0) (C) (6,0) (D) (0,4)

.....  
**EXERCISE # 2 (विषयात्मक प्रश्न)**  
 .....

1. माना  $4l^2-5m^2+6l+1=0$  जहाँ l तथा m प्राचाल है। सिद्ध करो कि  $lx+my+1=0$  एक नियत 2 घात के वक्र को स्पर्श करता है। वक्र ज्ञात करो।
2. वृत्त का समीकरण ज्ञात करो जो बिन्दुओं A(4,3) तथा B(2,5) से गुजरता है तथा y अक्ष को स्पर्श करता है। y-अक्ष पर बिन्दु P ज्ञात करो ताकि कोण APB महत्तम परिमाण का हो।
3. वृत्त  $x^2+y^2=25$  पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात करें जो अक्षों के साथ न्यूनतम क्षेत्रफल का त्रिभुज बनाती है।
4. एक त्रिभुज की दो भुजाये अक्षों के अनुदिश है तथा तीसरी भुजा वृत्त  $x^2+y^2-2ax-2ay+a^2=0$  को स्पर्श करती है। त्रिभुज के परिकेन्द्र का बिन्दुपथ का समीकरण ज्ञात करो।

5. वृत्त  $x^2+y^2=a^2$  के एक बिन्दु से वृत्त  $x^2+y^2=b^2$  पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा वृत्त  $x^2+y^2=c^2$  को स्पर्श करता है दर्शाए कि  $a, b, c, GP$  में है।
6. वृत्त  $x^2+y^2=a^2$  पर स्पर्श रेखाएँ वृत्त  $x^2+y^2=2a^2$  को P तथा Q पर काटती है। सिद्ध करो कि वृत्त  $x^2+y^2=2a^2$  पर बिन्दु P तथा Q पर स्पर्श रेखाएँ समकोण पर काटती हैं।
7. एक आयत के एक विकर्ण के अन्त बिन्दु  $(-4,4)$  तथा  $(6,-1)$  है। आयत पर एक वृत्त को परिगत किया जाता है जो कि y-अक्ष पर AB अन्तः खण्ड काटता है। वृत्त पर बिन्दु A तथा B पर स्पर्श रेखाओं तथा रेखा AB से बनाए गए त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो।
8. सिद्ध करो कि दो वृत्त  $x^2+y^2+2ax+c=0$  तथा  $x^2+y^2+2by+c=0$  स्पर्श करता है, यदि  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$ .
9. एक बिन्दु P से वृत्तों  $x^2+y^2+x-3=0$ ,  $3x^2+3y^2-5x+3y=0$  तथा  $4x^2+4y^2+8x+7y+9=0$  पर समान लम्बाई की स्पर्श रेखाएँ खींची जाती है। P से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात करो जो कि बिन्दु  $(6,-1)$  पर रेखा  $x+y=5$  पर स्पर्श करता है।
10. सरल रेखा  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  अक्षों के बिन्दु A तथा B पर मिलती है। एक बिन्दु P इस प्रकार गमन करता है कि कोण  $APB=30^\circ$  सिद्ध करो कि बिन्दु P का बिन्दुपथ एक वृत्त है।
11. 5 इकाई त्रिज्या के दो वृत्त एक दूसरे को  $(1,2)$  पर स्पर्श करते हैं। यदि उनकी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा  $4x+3y=10$  है। वृत्तों के समीकरण ज्ञात करो।
12. वृत्त  $S=0$  का केन्द्र  $2x-2y+9=0$  पर स्थित है तथा वृत्त  $S=0$  वृत्त  $x^2+y^2=4$  को लम्बकोणीय काटता है। दर्शाइये कि वृत्त  $S=0$  को नियत बिन्दुओं से गुजरता है तथा उनके निर्देशांक ज्ञात करो।
13. यदि दो रेखाएँ  $a_1x+b_1y+c_1=0$  तथा  $a_2x+b_2y+c_2=0$  निर्देशी अक्षों को समचक्रीय बिन्दुओं पर काटती है। सिद्ध करो कि  $a_1a_2=b_1b_2$  और वृत्त का समीकरण ज्ञात करो।
14. सिद्ध करो कि वृत्तों  $x^2+y^2=a^2$  और  $(x-c)^2+y^2=b^2$  की उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई  $\frac{1}{c}\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)}$  है।
15. प्राचाल 'a' का परिसर ज्ञात करो जिसके लिये चर रेखा  $y=2x+a$  दो वृत्तों  $x^2+y^2-2x-2y+1=0$  और  $x^2+y^2-16x-2y+61=0$  को प्रतिच्छेद नहीं करती है या किसी भी वृत्त का स्पर्श करती है।
16. दर्शाए कि वृत्त  $x^2+y^2=a^2$  की किसी स्पर्श रेखा पर बिन्दु  $(a,0)$  से डाले गए लम्ब के पाद का बिन्दुपथ  $(x^2+y^2-ax)^2=a^2[y^2+(x-a)^2]$  है।
17. दर्शाए कि एक बिन्दु जिससे वृत्त  $x^2+y^2=a^2$  पर डाली गई स्पर्श रेखाओं के मध्य अचर कोण  $\alpha$  है, का बिन्दुपथ  $(x^2+y^2-2a^2)\tan^2\alpha=4a^2(x^2+y^2-a^2)$  है।
18. रेखाएँ  $5x+12y-10=0$  तथा  $5x-12y-40=0$  एक 6 व्यास वाले वृत्त  $C_1$  को स्पर्श करती है। यदि  $C_1$  का केन्द्र प्रथम चतुर्थांश में स्थित है तब वृत्त  $C_2$  का समीकरण ज्ञात करो जो  $C_1$  का संकेन्द्रीय है तथा जो इन रेखाओं पर 8 लम्बाई का अन्तः खण्ड काटता है।

19. वृत्त  $x^2+y^2=a^2$  की जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ ज्ञात करो जो कि एक नियत बिन्दु  $(p,q)$  पर समकोण अन्तरिक करता है।
20. दर्शाइये कि P से गुजरने वाली रेखा वृत्त  $x^2+y^2=a^2$  को जिन दो बिन्दुओं पर काटती है उन दो बिन्दुओं के सापेक्ष बिन्दु  $P(x_1,y_1)$  के हरात्मक संयुग्मी का बिन्दुपथ  $xx_1+yy_1=a^2$  है।
21. वृत्त  $x^2+y^2=1$ , x-अक्ष को P तथा Q पर काटता है। अन्य वृत्त जिसका केन्द्र O तथा त्रिज्या चर है, प्रथम वृत्त को x- अक्ष के उपर बिन्दु R पर तथा रेखाखण्ड PQ को S पर प्रतिच्छेद करता है। त्रिभुज QSR का महत्तम क्षेत्रफल ज्ञात करें।
22. बिन्दुओं  $(a,5a)$  तथा  $(4a,a)$  द्वारा दो वृत्त खींचे जाते हैं जो y अक्ष का स्पर्श करते हैं। सिद्ध करो कि वे एक दूसरे की  $\tan^{-1}\left(\frac{40}{9}\right)$  कोण प्रतिच्छेद करते हैं।
23. यदि दो वृत्त जिसकी त्रिज्याएँ a तथा 'a' है क्रमशः  $S=0$  तथा  $S'=0$  है। तब सिद्ध करो कि वृत्तों  $\frac{S}{a} \pm \frac{S'}{a'} = 0$  एक दूसरे को लम्बकोणीय काटते हैं।
24. एक बिन्दु इस प्रकार गमन करता है कि इसकी इकाई भुजा वाले वर्ग की भुजाओं से दूरी के वर्ग का योग 9 है। दर्शाइए कि इसका बिन्दुपथ एक वृत्त है जिसका केन्द्र वर्ग का केन्द्र है। इसकी त्रिज्या भी ज्ञात करो।
25. एक गेंद दक्षिणावर्त दिशा में वृत्त  $x^2+y^2-2x-4y-20=0$  के अनुदिश गमन करती है तथा इसकी स्पर्श रेखा जो बिन्दु  $P(-2,-2)$  पर है, एक सरल रेखा पर परावर्तित होने पर यह वृत्त के केन्द्र से गुजरती है। सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें यदि इसकी P से लम्बवत् दूरी  $\frac{5}{2}$  है। आप मान सकते हैं कि रेखा का झुकाव परावर्तन कोण के बराबर है।

## Answers

### EXERCISE # 1

1.	B	2.	D	3.	C	4.	B	5.	B	6.	C	7.	C
8.	D	9.	A	10.	B	11.	C	12.	D	13.	C	14.	B
15.	A												

7.  $\frac{2}{3}(29)^{3/2}$

9.  $x^2+y^2-7x+7y+12=0$

### EXERCISE # 2

1.  $x^2+y^2-6x+4=0$

2.  $x^2+y^2-4x-6y+9=0$  OR

$x^2+y^2-20x-22y+121=0$ ,  $P(0,3)$ ,  $\theta=45^\circ$

3.  $x \pm y = \pm 5\sqrt{2}$

4.  $2(x+y) - a = \frac{2xy}{a}$

11.  $x^2+y^2+4x+2y-15=0$ ;  
 $x^2+y^2-10x-10y+25=0$

12.  $(-4,4)$ ;  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

13.  $a_1a_2(x^2+y^2)+(a_1c_2+a_2c_1)x+(b_1c_2+b_2c_1)y=0$

15.  $a \in \left(2\sqrt{5-15}, -\sqrt{5-1}\right)$

18.  $x^2+y^2-10x-4y+4=0$

19.  $2x^2+2y^2-2px-2qy+p^2+q^2-a^2=0$

Download FREE Study Package from [www.TekoClasses.com](http://www.TekoClasses.com) & Learn on Video  
[www.MathsBySuhag.com](http://www.MathsBySuhag.com) Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

21.  $\frac{4\sqrt{3}}{9}$  sq.units

24.  $r=2$

25.  $(4\sqrt{3}-3)x - (4+3\sqrt{3})y - (39-2\sqrt{3})=0$

**for 38 Yrs. Que. of  
IIT-JEE(ADVANCE)  
&  
14 Yrs. Que. of  
AIEEE(MAIN)  
we have distributed  
already a book**