

विध्न विचारत भीरु जन, नहीं आरम्भे काम,  
 विपति देख छोड़े तुरंत मध्यम मन कर श्याम।  
 पुरुष सिंह संकल्प कर, सहते विपति अनेक,  
 'बना' न छोड़े ध्येय को, रघुबर राखे टेक।।

रचित: मानव धर्म प्रणेता

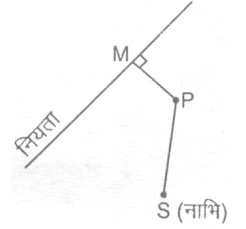
सद्गुरु श्री रणछोड़दासजी महाराज

## अतिपरवलय (Hyperbola)

अतिपरवलयिक वक्रों की विज्ञान और तकनीकी विशेषतः खगोलीय और अंतरिक्ष अध्ययन के क्षेत्रों में विशेष महत्व है। इस इध्याय में हम इस प्रकार के वक्रों के गुणधर्मा का अध्ययन कर रहे हैं।

**परिभाषा :** एक अतिपरवलय एक समतल में उस बिन्दु का बिन्दुपथ है जो इस प्रकार गमन करता है कि इसका एक स्थिर बिन्दु तथा एक स्थिर रेखा से दूरियों का अनुपात (बिन्दु रेखा पर स्थित नहीं है) एक अचर, 1 से अधिक होता है।

$$\frac{PS}{PM} = e > 1, \quad e - \text{उत्केन्द्रता}$$



### मानक समीकरण और परिभाषाएं (Standard Equation & Definition(s))

अतिपरवलय का मानक समीकरण  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  है।

जहाँ  $b^2 = a^2(e^2 - 1)$

• **उत्केन्द्रता :- (e) :**

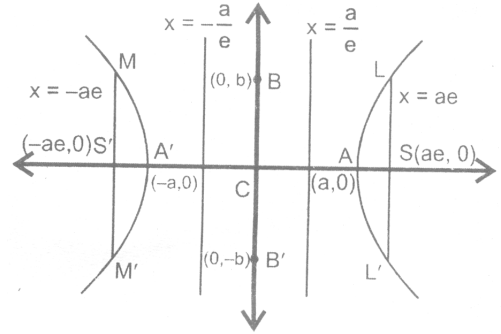
$$e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$$

• **नाभियों :**

$$S \equiv (ae, 0) \quad \& \quad S' \equiv (-ae, 0)$$

• **नियताओं के समीकरण :**

$$x = \frac{a}{e} \quad \text{तथा} \quad x = -\frac{a}{e}$$



• **अनुप्रस्थ अक्ष :**

2a लम्बाई का रेखाखण्ड AA' जिस पर दोनों नाभियों S और S' स्थित होती है, अतिपरवलय का अनुप्रस्थ अक्ष कहलाता है।

• **संयुग्मी अक्ष :**

दो बिन्दुओं B' ≡ (0, -b) तथा B ≡ (0, b) के मध्य का रेखाखण्ड BB', अतिपरवलय का संयुग्मी अक्ष कहलाता है।

• **मुख्य अक्ष :**

अतिपरवलय के अनुप्रस्थ और संयुग्मी अक्षों को मुख्य अक्ष कहते हैं।

• **शीर्ष :**

$$A \equiv (a, 0) \quad \text{और} \quad A' \equiv (-a, 0)$$

- **नाभीय जीवा :**  
नाभि से गुजरने वाली जीवा, नाभीय जीवा कहलाती है।
- **नाभिलम्ब ( $l$ ) :**  
अनुप्रस्थ अक्ष के लम्बवत् नाभीय जीवा, नाभिलम्ब कहलाती है।  
नाभिलम्ब ( $l$ ) दि जाती है।

$$l = \frac{2b^2}{a} = \frac{(C.A.)^2}{T.A.} = 2a(e^2 - 1)$$

नोट : (i)  $l$  (नाभिलम्ब)  $= 2e \times$  (नाभि से नियता की दूरी)

(ii) नाभिलम्ब के शीर्ष  $L \equiv \left( ae, \frac{b^2}{a} \right), L' \equiv \left( ae, -\frac{b^2}{a} \right), M \equiv \left( -ae, \frac{b^2}{a} \right), M' \equiv \left( -ae, -\frac{b^2}{a} \right)$  है।

- **केन्द्र :**  
किसी बिन्दु से गुजरने वाली सभी जीवायें उस बिन्दु पर समद्विभाजित होती हैं तो वह बिन्दु शांकव का केन्द्र कहलाता है। मूलबिन्दु  $C \equiv (0, 0)$  अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  का केन्द्र है।

**सामान्य नोट :**

चूँकि अतिपरवलय का मानक समीकरण, दीर्घवृत्त की मानक समीकरण में केवल  $b^2$  के स्थान पर  $-b^2$  से भिन्न है। अतः दीर्घवृत्त के बहुत से गुणधर्मों में  $b^2$  के चिन्ह को बदलकर अतिपरवलय के गुणधर्म प्राप्त किए जा सकते हैं।

### संयुग्मी अतिपरवलय (Conjugate hyperbola)

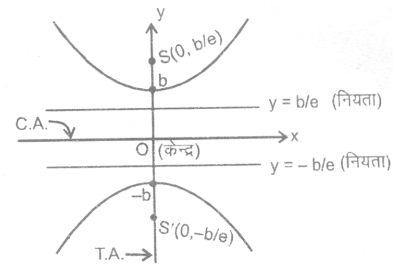
दो अतिपरवलय एक दूसरे के संयुग्मी अतिपरवलय होंगे यदि पहले अतिपरवलय के संयुग्मी अक्ष और अनुप्रस्थ अक्ष दूसरे अतिपरवलय के कमणः अनुप्रस्थ और संयुग्मी अक्ष हो।

**उदाहरण**  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  व  $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  एक दूसरे के संयुग्मी अतिपरवलय है।

**समीकरण :**  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

$$a^2 = b^2(e^2 - 1) \Rightarrow e = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$$

शीर्ष  $(0, \pm b)$  ;  $l(L.R.) = \frac{2a^2}{b}$



- नोट :**
- यदि  $e_1$  व  $e_2$  एक अतिपरवलय और इसके संयुग्मी अतिपरवलय की उत्केन्द्रताएँ हो, तो  $e_1^{-2} + e_2^{-2} = 1$
  - एक अतिपरवलय और इसके संयुग्मी अतिपरवलय की नाभियों समवृत्तीय होती हैं तथा ये वर्ग के शीर्ष होते हैं।
  - दो अतिपरवलय एक दूसरे के समरूप होते हैं यदि उनकी उत्केन्द्रताएँ समान हों
  - दो समरूप अतिपरवलय एक दूसरे के बराबर होंगे यदि उनके नाभिलम्ब समान हो।
  - एक आयतीय अतिपरवलय का संयुग्मी अतिपरवलय भी आयतीय होता है।

अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई : अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई  $2b=8$

संयुग्मी अक्ष की लम्बाई : संयुग्मी अक्ष की लम्बाई  $2a=6$

$$\text{उत्केन्द्रता : } e = \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)} = \sqrt{\left(1 + \frac{9}{16}\right)} = \frac{5}{4}$$

नाभियों के निर्देशांक  $(0, \pm be)$  i.e.,  $(0, \pm 5)$

शीर्ष : शीर्ष के निर्देशांक  $(0, \pm b)$  i.e.,  $(0, \pm 4)$

$$\text{नाभिलम्ब की लम्बाई : नाभिलम्ब की लम्बाई} = \frac{2a^2}{b} = \frac{2(3)^2}{4} = \frac{9}{2}$$

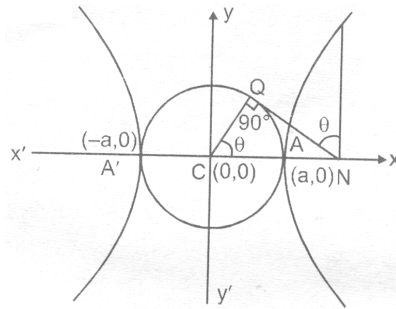
नियता का समीकरण : नियता का समीकरण

$$y = \pm \frac{b}{e} \quad \Rightarrow \quad y = \pm \frac{4}{(5/4)} \quad \Rightarrow \quad y = \pm \frac{16}{5}$$

**सहायक वृत्त (Auxiliary Circle) :**

दिये गये चित्र में यदि  $C$  को केन्द्र व अनुप्रस्थ अक्ष (T.A.) को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त अतिपरवलय का सहायक वृत्त कहलाता है। जिसका समीकरण  $x^2 + y^2 = a^2$  होता है।

$P$  तथा  $Q$  अतिपरवलय व सहायक वृत्त के " संगत बिन्दु " (Corresponding Points) कहलाते हैं।



**प्राचलिक निरूपण (Parametric representation) :**

समीकरण  $X = a \sec \theta$  तथा  $y = b \tan \theta$  अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  के प्राचलिक समीकरण कहलाते हैं। जहां  $\theta$  एक प्राचल है।

नोट : यदि  $P(\theta) \equiv (a \sec \theta, b \tan \theta)$  अतिपरवलय पर हो तो

$Q(\theta) \equiv (a \cos \theta, a \sin \theta)$  सहायक वृत्त पर होगा।

अतिपरवलय पर स्थित दो बिन्दुओं जिनके उत्केन्द्र कोण  $\alpha$  व  $\beta$  हो को मिलाने वाली जीवा का समीकरण

$$\frac{x}{a} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \frac{y}{b} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ होता है।}$$

**बिन्दु की अतिपरवलय के सापेक्ष स्थिति (Position of a point 'P' w.r.t. a hyperbola) :**

राशि  $S_1 \equiv \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1$  धनात्मक, शून्य या ऋणात्मक होगी यदि बिन्दु  $(x_1, y_1)$  क्रमशः वक्र के अन्दर, वृत्त पर या वक्र के बाहर स्थित हो।

**रेखा और अतिपरवलय (Line and a hyperbola)**

रेखा  $y = mx + c$  अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  के सापेक्ष क्रमशः जीवा, स्पर्श रेखा या बाहर होगी

क्रमशः यदि  $c^2 >$  या  $=$  या  $< a^2 m^2 - b^2$  होगा।

स्पर्ष रेखा (Tangents) :

(i) ढाल रूप (प्रवणता रूप) :  $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$  अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  की  $m$  प्रवणता वाली स्पर्ष रेखा है।

(ii) बिन्दु रूप : अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  के बिन्दु  $(x_1, y_1)$  पर स्पर्ष रेखा का समीकरण  $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$

(iii) प्राचलिक रूप : अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  के बिन्दु  $(a \sec \theta, b \tan \theta)$  पर स्पर्ष रेखा का समीकरण  $\frac{x \sec \theta}{a} - \frac{y \tan \theta}{b} = 1$ .

नोट : (i) बिन्दु  $P(\theta_1)$  व  $Q(\theta_2)$  पर स्पर्ष रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु  $\left( a \frac{\cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}}{\cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}, b \tan \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right)$

(ii) यदि  $|\theta_1 + \theta_2| = \pi$  हो, तो इन बिन्दुओं  $(\theta_1 \& \theta_2)$  पर स्पर्ष रेखाएँ समांतर होती हैं।

(iii) दो समांतर स्पर्ष रेखाएँ ( $m$  प्रवणता वाली) अतिपरवलय को व्यास के सिरे पर स्पर्ष करती हैं।

अभिलम्ब (Normals) :

(a) अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  के बिन्दु  $P(x_1, y_1)$  पर अभिलम्ब का समीकरण  $\frac{a^2x}{x_1} + \frac{b^2y}{y_1} = a^2 + b^2 = a^2e^2$

(b) अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  के बिन्दु  $(a \sec \theta, b \tan \theta)$  पर अभिलम्ब का समीकरण  $\frac{ax}{\sec \theta} + \frac{by}{\tan \theta} = a^2 + b^2 = a^2e^2$

(c) प्रवणता  $m$  के रूप में अभिलम्ब का समीकरण :  $y = mx \pm \frac{(a^2 + b^2)m}{\sqrt{a^2 - b^2m^2}}$

स्पर्ष रेखा युग्म (Pair of tangents) :

किसी बिन्दु  $(x_1, y_1)$  से अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  पर खींची गई स्पर्ष रेखा युग्म का समीकरण  $SS_1 = T^2$  होता है।

जहाँ  $S \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$  ;  $S_1 \equiv \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1$  ;  $T \equiv \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1$

नियामक वृत्त (Director circle) :

अतिपरवलय की दो परस्पर लम्बवत् स्पर्ष रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दुओं का बिन्दुपथ नियामक वृत्त कहलाता है। जिसका समीकरण  $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$  है।

यदि  $b^2 < a^2$  तो नियामक वृत्त वास्तविक होता है।

यदि  $b^2 = a^2$  (आयताकार अतिपरवलय) तो वृत्त की त्रिज्या शून्य होती है और यह मूलबिन्दु पर एक बिन्दु वृत्त में परिवर्तित हो जाता है। इस स्थिति में केवल केन्द्र ही वह बिन्दु होता है जिससे वक्र पर परस्पर लम्बवत् रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

यदि  $b^2 > a^2$  तो वृत्त की त्रिज्या काल्पनिक होती है और इसलिए न तो कोई वृत्त और न ही कोई लम्बवत् स्पर्ष रेखाओं का युग्म वक्र पर खींचा जा सकता है।

स्पर्ष जीवा (Chord of contact) :

बिन्दु  $P(x_1, y_1)$  से अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  पर खींची जाने वाली स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा का समीकरण

$$T=0 \text{ होता है, जहाँ } T = \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1$$

जीवा जिसका मध्य बिन्दु दिया गया है (Chord with a given middle point) :

अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  की जीवा जिसका मध्य बिन्दु  $(x_1, y_1)$  है, का समीकरण  $T=S_1$  होता है।

$$\text{जहाँ } S_1 = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \quad \text{व} \quad T = \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1$$

अतिपरवलय का व्यास (Diameter) :

अतिपरवलय  $y = -\frac{b^2}{a^2m}x$  के किसी सामान्तर जीवा निकाय जिसकी प्रवणता  $m$  हो, के मध्य बिन्दुओं का बिन्दु पथ उस अतिपरवलय का व्यास कहलाता है। यह अतिपरवलय के केन्द्र से गुजरने वाली एक सरल रेखा है और इसका समीकरण

$$y = -\frac{b^2}{a^2m}x \text{ होता है।}$$

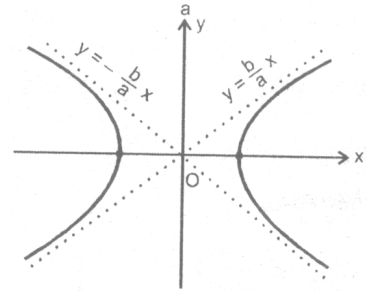
**नोट** : अतिपरवलय के सभी व्यास सदैव केन्द्र से गुजरते हैं।

अनन्तस्पर्षी (Asymptotes) :

अतिपरवलय का कोई बिन्दु जब वक की किसी शाखा के अनुदिश अनन्त की ओर अग्रसर होता है तो उस बिन्दु से किसी रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई यदि शून्य की ओर अग्रसर हो, तो वह सरल रेखा अतिपरवलय की अनन्तस्पर्षी कहलाती है।

- अनन्तस्पर्षियों के समीकरण :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$



- अनन्तस्पर्षियों का संयुक्त समीकरण :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

- नोट** :
- (i) अतिपरवलय तथा इसके संयुग्मी अतिपरवलय की अनन्तस्पर्षी समान होती है।
  - (ii) एक अतिपरवलय (या संयुग्मी अतिपरवलय) तथा इसकी अनन्तस्पर्षियों के युग्म समीकरण में केवल अचर पद का अंतर होता है।
  - (iii) अनन्तस्पर्षी सदैव अतिपरवलय के केन्द्र से गुजरती है तथा अनुप्रस्थ अक्ष से मान झुकी हुई होती है अतः अनन्तस्पर्षियों के कोणों के अर्धकोणों के समीकरण मुख्य अक्षों के समीकरण होते हैं।

- (iv) अतिपरवलय की अनन्तस्पर्शियों उस आयत के विकर्ण होते हैं जो इसके मुख्य अक्षों के अन्त बिन्दुओं पर दूसरे अक्ष के समान्तर रेखाएँ खींचने से प्राप्त होता है।
- (v) अतिपरवलय, जिसका समीकरण द्विघात के व्यापक समीकरण के रूप में दिया गया हो, के केन्द्र निर्देशांक निम्न प्रकार से आसानी से ज्ञात किये जा सकते हैं :  
 माना अतिपरवलय का समीकरण  $f(x,y)=0$  है  
 तो  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  तथा  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$  का प्रतिच्छेद बिन्दु अतिपरवलय का केन्द्र होता है।

- टिप्पणी :** (i) अतिपरवलय के केन्द्र से कोई भी स्पर्श रेखा नहीं खींची जा सकती है।
- (ii) केन्द्र को छोड़कर अनन्त स्पर्शों पर स्थित किसी भी बिन्दु से उसी अतिपरवलय पर केवल एक ही स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।
- (iii) किसी भी बाहरी बिन्दु जो कि अनन्त स्पर्शों पर स्थित नहीं है, उस अतिपरवलय पर दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती है।

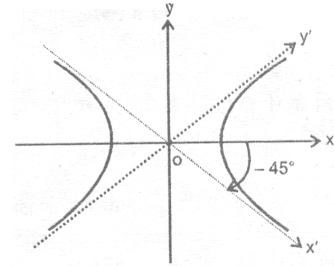
**आयतीय या समकोणीय या सम अतिपरवलय (Rectangular hyperbola (equilateral hyperbola)) :**

अतिपरवलय जिसके अनुप्रस्थ अक्ष तथा संयुग्मी अक्ष की लम्बाई समान हो एक समकोणीय अतिपरवलय कहलाता है समकोणीय अतिपरवलय की उत्केन्द्रता सदैव  $\sqrt{2}$  होती है।

$\therefore a=b$   
 इसलिए समीकरण  $x^2-y^2=a^2$   
 जिस अनन्त स्पर्शों  $y=\pm x$

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

इस निकाय का दक्षिणावर्त दिशा में  $45^\circ$  धूर्णन आयतीय अतिपरवलय का अन्य रूप प्रदान करता है।



जोकि  $xy=c^2$  जहाँ पर  $c^2 = \frac{a^2}{2}$

**समकोणीय अतिपरवलय ( $xy=c^2$ ) :**

यह अनन्तस्पर्शियों को निर्देशी अक्ष लेने पर आयतीय अतिपरवलय का समीकरण  $xy=c^2$  होता है।

**शीर्ष :**  $(c,c)$  &  $(-c,-c)$ ;

**नाभियों :**  $(\sqrt{2}c, \sqrt{2}c)$  &  $(-\sqrt{2}c, -\sqrt{2}c)$ ,

**नियताएँ :**  $x + y = \pm\sqrt{2}c$

**नाभिलम्ब (l) :**

$$l = 2\sqrt{2}c = T.A = C.A$$

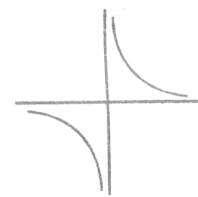
प्राचलिक समीकरण :  $x=ct, y=c/t, t \in \mathbb{R}-\{0\}$

बिन्दुओं  $P(t_1)$  व  $Q(t_2)$  को मिलाने वाली जीवा समीकरण :  $x+t_1t_2y=c(t_1+t_2)$

बिन्दु  $P(x_1y_1)$  पर स्पर्श रेखा का समीकरण :  $\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 2$  तथा बिन्दु  $P(t)$  पर स्पर्शरेखा का समीकरण :  $\frac{x}{t} + ty = 2c$

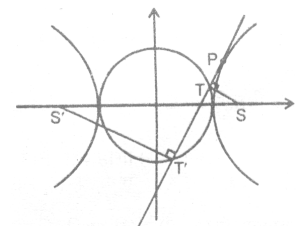
बिन्दु  $P(t)$  पर अभिलम्ब का समीकरण  $xt^3 - yt = c(t^4 - 1)$ .

मध्य बिन्दु  $(h,k)$  वाली जीवा का समीकरण  $kx + hy = 2hk$ .

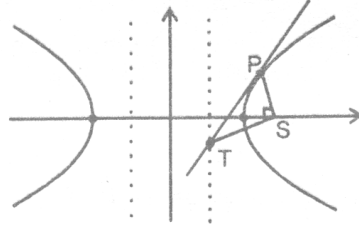


**महत्वपूर्ण परिणाम (Important results) :**

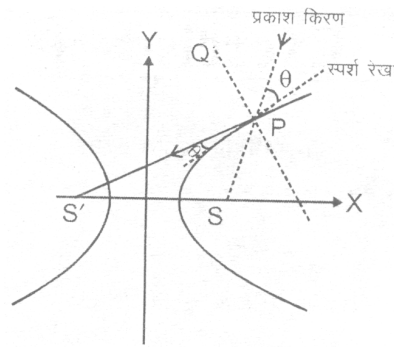
- नाभिय दूरियों का अन्तर अचर  $|PS-PS'| = 2a$  है।



- अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  की नाभि से इसकी किसी स्पर्श रेखा पर डाले गए लम्ब के पाद का बिन्दुपथ उसका सहायक वृत्त होता है। अर्थात्  $x^2 + y^2 = a^2$  तथा इन लम्बों का गुणनफल  $b^2$  होता है।
- स्पर्श रेखा द्वारा स्पर्श बिन्दु तथा नियता के बीच में काटा गया अन्तः खण्ड संगत नाभि पर समकोण बनाता है।

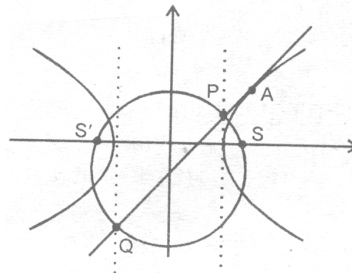


- अतिपरवलय के किसी बिन्दु पर खींचे गये अभिलम्ब तथा स्पर्श रेखा नाभिय त्रिज्याओं के बीच के कोण को समद्विभाजित करती है। यह अतिपरवलय के परावर्तन गुणधर्म को परिभाषित करता है जिसके अनुसार यदि कोई प्रकाश किरण किसी एक नाभि पर डाली जाए तो यह अतिपरवलय के बाह्य पृष्ठ से परावर्तित होकर दूसरी नाभि पर जाती है। अतः यदि एक अतिपरवलय एक दीर्घवृत्त समनाभिय हो तो वे उनके उभयनिष्ठ बिन्दु पर लम्बवत प्रतिच्छेद करते हैं।

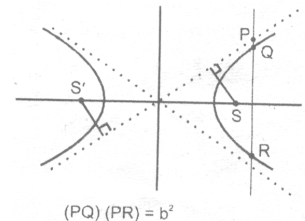


दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  तथा  $\frac{x^2}{a^2 - k^2} - \frac{y^2}{k^2 - b^2} = 1$  समनाभिय है अतः  $(a > k > b > 0)$  वे लम्बकोणीय होंगे।

- अतिपरवलय की कोई स्पर्श रेखाएँ उसके शीर्षों पर खींची गई स्पर्श रेखाओं को P व Q पर मिलती है तो ये बिन्दु नाभियों के साथ समवृत्तीय होते हैं जिसका व्यास PQ होता है।



- यदि अनन्त स्पर्षी के किसी बिन्दु से अनुप्रस्थ अक्ष के लम्बवत एक सरल रेखा खींची जाए, तो इस रेखा द्वारा वक्र तथा स्पर्श बिन्दु के बीच काटे गये अन्तः खण्डों का गुणनफल, अर्द्ध संयुग्मी अक्ष के वर्ग के बराबर होता है।



- नाभियों से किसी अनन्तस्पर्षी पर खींचा गया लम्ब उन्ही बिन्दुओं पर मिलता है जहां पर संगत नियता मिलती है तथा उभयनिष्ठ प्रतिच्छेद बिन्दु सहायक वृत्त पर स्थित होते हैं।
- नाभियों से किसी अनन्तस्पर्षी पर खींचा गया लम्ब उन्ही बिन्दुओं पर मिलता है जहां पर संगत नियता मिलती है तथा उभयनिष्ठ प्रतिच्छेद बिन्दु सहायक वृत्त पर स्थित होते हैं।

- अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  जिसका केन्द्र C है के बिन्दु P पर खींची गई स्पर्श रेखा अनन्त स्पर्शियों को Q एवं R पर मिलती है तथा  $\Delta CQR$  त्रिभुज बनाती है जिसका क्षेत्रफल  $ab$  होगा। तथा स्पर्श रेखा द्वारा स्पर्शियों के बीच काटा गया अन्तः खण्ड स्पर्श बिन्दु के द्वारा समद्विभाजित होता है। इससे स्पष्ट है कि आयतीय अतिपरवलय के लिए  $\Delta CQR$  के परिगत वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ स्वयं अतिपरवलय होगा तथा मानक अतिपरवलय के लिए बिन्दुपथ  $4(a^2x^2 - b^2y^2) = (a^2 + b^2)^2$  होगा।
- यदि अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  की अनन्त स्पर्शियों के बीच का कोण  $2\theta$  अतिपरवलय की उत्केन्द्रता  $\sec \theta$  होगी।
- किसी त्रिभुज के परिगत आयतीय अतिपरवलय उस त्रिभुज के लम्ब केन्द्र से गुजरता है। यदि  $\left( ct_i, \frac{c}{t_i} \right) | i = 1, 2, 3$  कोणीय बिन्दु P, Q, R हो, तो लम्बकेन्द्र  $\left( \frac{-c}{t_1 t_2 t_3}, -ct_1 t_2 t_3 \right)$  होगा।
- यदि एक वृत्त आयतीय अतिपरवलय  $xy = c^2$  को चार बिन्दुओं  $t_1, t_2, t_3$  तथा  $t_4$  पर मिलता है तो  
 (a)  $t_1 t_2 t_3 t_4 = 1$   
 (b) चारों बिन्दुओं की मध्य स्थिति का केन्द्र दोनों वक्रों के केन्द्रों के बीच की दूरी को समद्विभाजित करता है।  
 (c) बिन्दु  $t_1, t_2$  व  $t_3$  से जाने वाले वृत्त का केन्द्र  

$$\left\{ \frac{c}{2} \left( t_1 + t_2 + t_3 + \frac{1}{t_1 t_2 t_3} \right), \frac{c}{2} \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + t_1 + t_2 + t_3 \right) \right\}$$

## Exercise – 1

### 1- A(बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. शांकव  $x^2 - y^2 - 4x + 4y + 16 = 0$  की उत्केन्द्रता है –  
 (A) 1 (B)  $\sqrt{2}$  (C) 2 (D) 1/2
2. एक दीर्घवृत्त और अतिपरवलय का केन्द्र मूलबिन्दु है, नाभियों समान है और एक लघु अक्ष दूसरे का संयुग्मी अक्ष है। यदि उनकी उत्केन्द्रताएं क्रमशः  $e_1$  और  $e_2$  है, तो  $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} =$   
 (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) इनमें से कोई नहीं
3. सभी  $\alpha \in (0, \pi/2)$  के लिए निम्न में से कौनसा युग्म दो संयुग्मी अतिपरवलय की उत्केन्द्रताओं को प्रदर्शित कर सकता है –  
 (A)  $\sin \alpha, \cos \alpha$  (B)  $\tan \alpha, \cot \alpha$  (C)  $\sec \alpha, \operatorname{cosec} \alpha$  (D)  $1 + \sin \alpha, 1 + \cos \alpha$
4. उस अतिपरवलय की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए जिसका नाभिलम्ब 8 है तथा संयुग्मी अक्ष नाभियों के बीच की दूरी का आधा है।  
 (A)  $\frac{4}{3}$  (B)  $\frac{4}{\sqrt{3}}$  (C)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  (D) इनमें से कोई नहीं
5. वक्र  $4x^2 - 9y^2 = 36$  पर कितनी स्पर्श रेखाएं खींची जा सकती हैं जो कि सरल रेखा  $5x + 2y - 10 = 0$  के लम्बवत् हैं।



- (A) zero (B) 1 (C) 2 (D) 4
6. रेखा  $y=2x$  के समान्तर अतिपरवलय  $3x^2-2y^2+4x-6x=0$  की जीवाओं के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ है –  
 (A)  $3x-4y=4$  (B)  $3y-4x+4=0$  (C)  $4x-4y=3$  (D)  $3x-4y=2$
7. बिन्दु  $L(2,1)$  से गुजरने वाली जीवाएं अतिपरवलय  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  को P तथा Q पर काटती है। अगर P तथा Q से गुजरने वाली स्पर्श रेखाएँ R पर प्रतिच्छेद करती है, तब R बिन्दुपथ होगा –  
 (A)  $x-y=1$  (B)  $9x-8y=72$  (C)  $x+y=3$  (D) इनमें से कोई नहीं
8. अतिपरवलय  $2x^2+5xy+2y^2+4x+5y=0$  के अनन्तस्पर्शियों का संयुक्त समीकरण हैं –  
 (A)  $2x^2+5xy+2y^2+4x+5y+2=0$  (B)  $2x^2+5xy+2y^2+4x+5y-2=0$   
 (C)  $2x^2+5xy+2y^2=0$  (D) इनमें से कोई नहीं
9. यदि बिन्दु  $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$ ,  $R(x_3, y_3)$  व  $S(x_4, y_4)$  आयतीय अतिपरवलय  $xy=c^2$  पर सम वृत्तीय हो, तो  $\Delta PQR$  के लम्बकेन्द्र के निर्देशांक हैं –  
 (A)  $(x_4, y_4)$  (B)  $(x_4, -y_4)$  (C)  $(-x_4, -x_4)$  (D)  $(-x_4, -y_4)$
10. त्रिभुज ABC के परिगत एक आयतीय अतिपरवलय खींचा जाता है तो यह सदैव गुजरता है –  
 (A) लम्बकेन्द्र से (B) परिकेन्द्र से (C) केन्द्रक से (D) अन्तः केन्द्र से

**एक से अधिक विकल्प सही**

11. अतिपरवलय  $9x^2-16y^2+18x+32y-151=0$  के नाभियों के निर्देशांक है –  
 (A)  $(-1,1)$  (B)  $(6,1)$  (C)  $(4,1)$  (D)  $(-6,1)$

**1-B (विषयात्मक प्रश्न)**

1. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नियता  $2x+y=1$  नाभि  $(1,2)$  तथा उत्केन्द्रता  $\sqrt{3}$  है।
2. अतिपरवलय  $x^2/100-y^2/25=1$  के लिए सिद्ध कीजिए –  
 (i) उत्केन्द्रता  $=\sqrt{5}/2$   
 (ii)  $SA.S'A=25$  जहाँ S व S' नाभियां तथा A शीर्ष है।
3. अतिपरवलय की नाभियों दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  की नाभियों के सम्पाती हैं। अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि इसकी उत्केन्द्रता 2 है।
4. अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  रेखाओं  $7x+13y-87=0$  और  $5x-8y+7=0$  के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरता है तथा नाभिलम्ब  $32\sqrt{2}/5$  है। a व b का मान ज्ञात करो।
5. अतिपरवलय  $x^2-4y^2=36$  की स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो  $x-y+4=0$  के लम्बवत् है।

6. अतिपरवलय  $x^2-9y^2=9$  पर बिन्दु (3,2) से खींची गई स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात करो। उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो ये स्पर्श रेखाएँ स्पर्श जीवा के साथ बनाती है।
7. अतिपरवलय  $x^2/a^2-y^2/b^2=1$  के नाभिलम्ब के शीर्ष बिन्दु पर खींचा गया अभिलम्ब एक अनन्तस्पर्शी के समान्तर है। सिद्ध कीजिए कि उत्केन्द्रता  $(1+\sqrt{5})/2$  के वर्गमूल के बराबर है।
8. अतिपरवलय  $x^2/a^2-y^2/b^2=1$  के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा व अभिलम्ब  $y$ -अक्ष को A व B बिन्दु पर काटते हैं। सिद्ध कीजिए कि AB को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त अतिपरवलय की नाभियों से गुजरता है।
9. उत्केन्द्रता  $e$  के अतिपरवलय के बिन्दु P पर अभिलम्ब इसकी अनुप्रस्थ व संयुग्मी अक्षों को क्रमशः L तथा M पर काटता है। सिद्ध कीजिए कि LM के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ एक अतिपरवलय है जिसकी उत्केन्द्रता  $\frac{e}{\sqrt{e^2-1}}$  है।
10. अतिपरवलय  $2x^2-3xy-2y^2+3x-y+8=0$  की अनन्तस्पर्शियों ज्ञात कीजिए। संयुग्मी अतिपरवलय का समीकरण और वक्र के मुख्य अक्षों के समीकरण भी ज्ञात कीजिए।
11. एक त्रिभुज का आधार तथा इसके आधार के अर्ध कोणों की स्पर्शज्याओं का अनुपात दिया गया है। सिद्ध कीजिए कि शीर्ष एक अतिपरवलय पर गति करता है जिसकी नाभियाँ आधार के सिरे हैं।
12. अतिपरवलय का मानक समीकरण ज्ञात कीजिए यदि वह  $(-\sqrt{3}, 3)$  से गुजरता है तथा इसकी अनन्तस्पर्शियों  $x\sqrt{5} \pm y = 0$  हैं।
13. यदि अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  के किसी बिन्दु से अनन्तस्पर्शियों पर लम्ब  $p_1$  तथा  $p_2$  है, तो सिद्ध कीजिए कि  $\frac{1}{p_1 p_2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ .
14. अतिपरवलय  $x^2-y^2=a^2$  की जीवाएँ परवलय  $y^2=4ax$  को स्पर्श करती है। सिद्ध कीजिए उनके मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ वक्र  $y^2(x-a)=x^3$  हैं।

## Exercise – 2

### 2-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. यदि P अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  का कोई बिन्दु है तथा N बिन्दु P से अनुप्रस्थ अक्ष पर डाले गये लम्ब का पाद है तथा अतिपरवलय के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा अनुप्रस्थ अक्ष को बिन्दु T पर मिलती है। यदि O अतिपरवलय का केन्द्र हो, तो OT.ON का मान है  
 (A)  $e^2$                       (B)  $a^2$                       (C)  $b^2$                       (D)  $b^2/a^2$
2. अतिपरवलय  $xy=c^2$  के किसी चर बिन्दु पर स्पर्श रेखा पर केन्द्र से डाले गए लम्ब के पाद का बिन्दुपथ है –

(A)  $(x^2-y^2)^2=4c^2xy$  (B)  $(x^2+y^2)^2=2c^2xy$  (C)  $(x^2+y^2)=4c^2xy$  (D)  $(x^2+y^2)^2=4c^2xy$

3. यदि PN आयतीय अतिपरवलय के बिन्दु P से अनंतस्पर्षी पर लम्ब है, तो PN के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ है -

(A) वृत्त (B) परवलय (C) दीर्घवृत्त (D) अतिपरवलय

4. एक आयतीय अतिपरवलय जिसका केन्द्र C है, को r त्रिज्या का वृत्त चार बिन्दुओं P, Q, R व S पर काटता है, तो  $CP^2+CQ^2+CR^2+CS^2$  का मान है -

(A)  $r^2$  (B)  $2r^2$  (C)  $3r^2$  (D)  $4r^2$

5. यदि e व e' अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  व  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$  की उत्केन्द्रताएँ हैं, तो बिन्दु  $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e'}\right)$  किस वृत्त पर स्थित होगा -

(A)  $x^2+y^2=1$  (B)  $x^2+y^2=2$  (C)  $x^2+y^2=3$  (D)  $x^2+y^2=4$

6. अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा अक्षों को क्रमशः बिन्दुओं A तथा B पर प्रतिच्छेद करती है। दि आयत OAPB (O मूल बिन्दु है) पूर्ण किया जाए, तो P का बिन्दुपथ है -

(A)  $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$  (B)  $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$  (C)  $\frac{a^2}{y^2} - \frac{b^2}{x^2} = 1$  (D) इनमें से कोई नहीं

एक से अधिक विकल्प सही

7. यदि  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  की नाभीय जीवा के अन्तिम बिन्दु  $(a \sec \theta, b \tan \theta)$  व  $(a \sec \phi, b \tan \phi)$  हैं, तो  $\tan \frac{\theta}{2} \tan \frac{\phi}{2}$  का मान है -

(A)  $\frac{e-1}{e+1}$  (B)  $\frac{1-e}{1+e}$  (C)  $\frac{1+e}{1-e}$  (D)  $\frac{e+1}{e-1}$

8. यदि अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  की उत्केन्द्रता 'e' तथा अनन्तस्पर्षीयों के मध्य कोण  $\theta$  है, तो  $\cos(\theta/2) =$

(A)  $\frac{1-e}{e}$  (B)  $\frac{\sqrt{e^2-1}}{e}$  (C)  $\frac{1}{e}$  (D)  $\frac{1}{1+e}$

9. यदि (5,12) व (24,7) मूल बिन्दु से गुजरने वाले एक शांकव की नाभियाँ हैं, तो उस शांकव की उत्केन्द्रता है -

(A)  $\sqrt{386}/12$  (B)  $\sqrt{386}/13$  (C)  $\sqrt{386}/25$  (D)  $\sqrt{386}/38$

10. यदि आयतीय अतिपरवलय  $x^2-y^2=4$  के बिन्दु P पर अभिलम्ब अक्षों को G व g बिन्दुओं पर काटता है तथा C अतिपरवलय का केन्द्र है, तो -

(A)  $PG=PC$  (B)  $Pg=PC$  (C)  $PG=Pg$  (D)  $Gg=PC$

11. यदि आयतीय अतिपरवलय  $xy=2$  के बिन्दुओं  $(x_i, y_i)_{i=1, 2, 3, 4}$  पर अभिलम्ब बिन्दु (3, 4) पर मिलते हैं, तो -

(A)  $x_1+x_2+x_3+x_4=3$  (B)  $y_1+y_2+y_3+y_4=4$   
 (C)  $x_1 x_2 x_3 x_4 = -4$  (D)  $y_1 y_2 y_3 y_4 = -4$

2-B (विषयात्मक प्रश्न)

- अतिपरवलय  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$  के बिन्दु  $(h, k)$  पर खींची गई स्पर्श रेखा सहायक वृत्त को उन बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है जिनकी कोटियाँ  $y_1$  व  $y_2$  है, तो सिद्ध कीजिए कि  $1/y_1 + 1/y_2 = 2/k$
- बिन्दु  $(\alpha, \beta)$  से अतिपरवलय  $3x^2 - 2y^2 = 6$  पर स्पर्श रेखाएँ खींची गई है और वे  $x$ -अक्ष से  $\theta$  व  $\phi$  कोण बनाती है। यदि  $\tan \theta \cdot \tan \phi = 2$  हो, तो सिद्ध करो कि  $\beta^2 = 2\alpha^2 - 7$ .
- यदि अतिपरवलय  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$  के बिन्दु  $P$  पर अभिलम्ब अनुप्रस्थ अक्ष एवं संयुग्मी अक्ष को क्रमशः  $G$  व  $g$  पर प्रतिच्छेद करता है एवं अभिलम्ब पर केन्द्र  $C_1$  से डाला गया लम्ब  $CF$  है, तो सिद्ध कीजिए कि  $|PF \cdot PG| = b^2$  एवं  $PF \cdot Pg = a^2$  जहाँ  $a$  व  $b$  अतिपरवलय की अर्द्ध अनुप्रस्थ अक्ष एवं अर्द्ध संयुग्मी अक्ष की लंबाईयाँ हैं।
- यदि अतिपरवलय  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$  के बिन्दु  $P$  पर अभिलम्ब  $x$ -अक्ष को बिन्दु  $G$  पर प्रतिच्छेद करता है, तो प्रदर्शित कीजिए कि  $SG = e \cdot SP$ , जहाँ  $S$  अतिपरवलय की नाभि है।
- एक तिर्यक रेखा अतिपरवलय  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$  की समान शाखा को  $P$  व  $P'$  पर अनन्तस्पर्शियों को  $Q, Q'$  पर प्रतिच्छेद करती है तो सिद्ध कीजिए कि (i)  $PQ = P'Q'$  तथा (ii)  $PQ' = P'Q$
- यदि मूल बिन्दु से जाने वाली एक सरल रेखा वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2$  को  $P$  व अतिपरवलय  $x^2 - y^2 = a^2$  को  $Q$  पर प्रतिच्छेद करती है तो सिद्ध करो कि वृत्त के बिन्दु  $P$  व अतिपरवलय के बिन्दु  $Q$  पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दुओं का बिन्दुपथ  $a^4(x^2 - a^2) + 4x^2y^4 = 0$  है।
- परवलय  $x^2 = 4ay$  पर एक स्पर्श रेखा अतिपरवलय  $xy = k^2$  को दो बिन्दुओं  $P$  व  $Q$  पर प्रतिच्छेद करती है, तो सिद्ध कीजिए कि  $PQ$  का मध्य बिन्दु परवलय पर स्थित है।
- सिद्ध कीजिए कि अतिपरवलय  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$  के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा का वह भाग, जो कि स्पर्श बिन्दु व अनुप्रस्थ अक्ष के बीच अतः खंडित है, नाभियाँ से उसी बिन्दु पर अभिलम्ब पर डाले गए लम्ब की लम्बाईयाँ का हरात्मक माध्य होता है।
- यदि अतिपरवलय  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$  की जीवाएँ, नाभियों को मिलाने वाली रेखा को व्यास मानकर खींचे गए वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं, तो जीवाओं के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।
- एक बिन्दु  $P$  अतिपरवलय  $9x^2 - 16y^2 = 144$  की नाभीय दूरियों को अनुपात  $S'P:PS = 2:3$  में विभाजित करता है, जहाँ  $S$  व  $S'$  अतिपरवलय की नाभियाँ हैं।  $P$  से जाने वाली एक सरल रेखा  $OX$  अक्ष से  $135^\circ$  का कोण बनाती है तो इस रेखा एवं अतिपरवलय की अनन्तस्पर्शियों के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

Exercise – 3

3-A (स्तम्भ मिलान)

- | 1. स्तम्भ-I   | स्तम्भ-II |
|---|-----------|
| (A) रेखा $y = x + 1$ के समान्तर अतिपरवलय $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ की स्पर्श रेखा | (p) 16    |
| खींचने के लिए $b$ के पूर्णांक मानों की संख्या है –  |           |
| (B) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + \lambda = 0$ एक वास्तविक सरल रेखा युग्म को प्रदर्शित         | (q) 5     |

न्हीं करता है, यदि  $\lambda =$

(C) अतिपरवलय  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{3} = 1$  की किसी स्पर्श रेखा पर दो नाभियों से डाले (r) 9

लम्ब की लम्बाइयों का गुणनफल  $\sqrt{k}$  है, तो  $k =$

(D) संख्या 27720 को दो गुणाकों में विभाजित कर सकते हैं जो सहभाज्य (s) 9  
 हैं, के तरीकों की संख्या है -

2. स्तम्भ-I

स्तम्भ-II

(A) एक  $\Delta ABC$  में, लम्बकेन्द्र, केन्द्रक तथा शीर्ष A के निर्देशांक क्रमशः (3,2), (3,1), तथा (1,2) है, तो शीर्ष B का x-निर्देशांक है - (p) 3

(B) रेखा  $x+y=a$  अतिपरवलय  $x^2-2y^2=18$  को स्पर्श करती है। यदि यदि  $a, \pm b$  के बराबर है, तो  $|b|$  का मान है - (q) 44

(C) यदि त्रिभुज का लम्बकेन्द्र  $(\lambda, 4)$  है जिसके शीर्ष आयतीय अतिपरवलय  $xy=16$  पर स्थित है, तो  $\lambda =$  (r) 12

(D) दो वृत्त  $x^2 + y^2 + 3\sqrt{2}(x + y) = 0$  तथा (s) 8  
 $x^2 + y^2 + 5\sqrt{2}(x + y) = 0$  दिये गये हैं। मानाकि तीसरे वृत्त की त्रिज्या जो दिये गये दो वृत्तों को तथा उनके उभयनिष्ठ व्यास को स्पर्श करता है, का मान  $\frac{2p-1}{p}$  है, तो p का मान है -

3-B (कथन/कारण)

3. कथन-1 : रेखा  $5x+2y-3=0$  के लम्बवत् अतिपरवलय  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$  की स्पर्श रेखाओं की कुल संख्या 2 है।

कथन-2 : प्रवणता m के पदों में अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  की स्पर्श रेखा का समीकरण  $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$  है।  
 यदि  $a^2m^2 - b^2 > 0$

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है  
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।  
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।  
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

4. अतिपरवलय  $xy=c^2$  के बिन्दु  $P(t_1)$  पर खींचा गया अभिलम्ब अतिपरवलय को पुनः बिन्दु  $Q(t_2)$  पर मिलता है।

कथन-1 : P तथा Q के मध्य दूरी का वर्ग  $c^2(t_1 - t_2)^2 \left(1 + \frac{1}{t_1^2 t_2^2}\right)$  है।

कथन-2 :  $t_1^3 t_2 = -1$

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है  
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।  
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।  
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

5. कथन-1 : उन बिन्दुओं की संख्या जिससे अतिपरवलय  $xy=c^2$  पर दो लम्बवत् स्पर्श रेखाओं खींची जा सकती है, अनन्त है।  
 कथन-2 : आयतीय अतिपरवलय में अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई सयुग्मी अक्ष की लम्बाई के बराबर होती है।  
 (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है  
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।  
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।  
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

3-C (अनुच्छेद)

6. अनुच्छेद

व्यापक द्विघात समीकरण एक अतिपरवलय को प्रदर्शित करती है, यदि  $h^2-ab>0$  तथा  $\Delta \neq 0$  जहाँ  $\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$  माना H तथा

H'दो अतिपरवलय है। ये एक-दूसरे के संयुग्मी कहलाते हैं, यदि एक अतिपरवलय की अनुप्रस्थ तथा सयुग्मी अक्ष क्रमशः दूसरे की सयुग्मी तथा अनुप्रस्थ अक्ष को। यदि इसके अनन्तस्पर्शियों का युग्म A हो, तो H, H', A के समीकरण केवल नियत पदो (constant term) द्वारा अलग होते हैं तथा  $H-A=A-H'$  है, तो निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए -

- 6.1 मानाकि अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  पर कोई बिन्दु P स्थित है तथा PN अनुप्रस्थ अक्ष पर लम्ब है। माना A तथा A'

अतिपरवलय के शीर्ष है, तो  $\frac{PN^2}{NA.NA'} =$

- (A)  $\frac{a^2}{b^2}$  (B)  $\frac{b^2}{a^2}$  (C)  $a^2$  (D)  $b^2$

- 6.2 अतिपरवलय  $x^2-y^2=a^2$  का नियामक वृत्त है -

- (A)  $x^2+y^2=ax^2$  (B)  $x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$  (C)  $x^2+y^2=a^2$  (D) इनमें से कोई नहीं

- 6.3 अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  की द्विकोटि PNP' अनन्तः स्पर्शों को क्रमशः Q तथा Q' पर मिलती है। जहाँ Q,P के निकट है, तो  $PQ \cdot PQ' =$

- (A) अर्द्ध अनुप्रस्थ अक्ष के वर्ग के (B) अर्द्ध-संयुग्मी अक्ष के वर्ग के  
 (C) अनुप्रस्थ अक्ष के वर्ग के (D) संयुग्मी अक्ष के वर्ग के

7. अनुच्छेद

बिन्दु P(-1, 2) से खींची एक रेखा अतिपरवलय  $xy=c^2$  को बिन्दुओं A तथा B पर मिलती है (बिन्दु A तथा B, P के एक ही ओर स्थित है।) तथा बिन्दु Q रेखाखण्ड AB पर स्थित है।

- 7.1 यदि बिन्दु Q इस प्रकार चुना जाता है कि PA, PQ तथा PB समान्तर श्रेढी में हो, तो बिन्दु Q का बिन्दुपथ है -

- (A)  $x=y(1+2x)$  (B)  $x=y(1+x)$  (C)  $2x=y(1+2x)$  (D)  $2x+y(1+x)$

- 7.2 यदि बिन्दु Q इस प्रकार चुना जाता है कि PA, PQ तथा PB गुणोत्तर श्रेढी में हो, तो बिन्दु Q का बिन्दुपथ है -

(A)  $xy-y+2x-c^2=0$  (B)  $xy+2x+c^2=0$  (C)  $xy+y+2x+c^2=0$  (D)  $xy-y-2x-c^2=0$

7.3 यदि बिन्दु Q इस प्रकार चुना जाता है कि PA, PQ PB हरात्मक श्रेढी में हो तो Q का बिन्दुपथ है –

(A)  $2xy-y=2c^2$  (B)  $x-2=2c^2$  (C)  $2x+y+2c^2=0$  (D)  $x+2y=2c^2$

3-D (सत्य/असत्य कथन)

8. बिन्दु P से अतिपरवलय  $(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1$  पर खींची गई स्पर्श रेखा अनन्तस्पर्शी  $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$  को Q पर मिलती है। अगर PQ के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ का समीकरण  $(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=k$  है, k का मान  $1/4$  होगा।

9. अतिपरवलय  $x^2/36-y^2/25=1$  पर खींची गई जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुओं जो कि स्थिर बिन्दु (2, 4) से गुजरता है, अतिपरवलय है जिसका केन्द्र (1, 2) है।

10. अतिपरलय  $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$  के नाभियों के निर्देशांक (-6, 2) और (4, 2) है।

11. अतिपरवलय  $4x^2-9y^2=36$  की नाभि से इसकी किसी स्पर्श रेखा पर डाले गये लम्ब पाद का बिन्दुपथ का समीकरण  $x^2+y^2=9$  है।

12. अगर अतिपरवलय  $x^2-y^2 \sec^2 \alpha=5$  की उत्केन्द्रता दीर्घवृत्त  $x^2 \sec^2 \alpha+y^2=25$  की उत्केन्द्रता की  $\sqrt{3}$  गुना है, तब  $\alpha$  का मान  $\pi/4$  होगा।

3-E (रिक्त स्थान की पूर्ति)

13. अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$  के नाभिलम्ब की लम्बाई ----- है।

14. अतिपरवलय  $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$  की अनन्तस्पर्शियों के बीच का कोण ----- है।

15. यदि अतिपरवलय  $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$  दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$  की नाभि से गुजरता है तो अतिपरवलय की उत्केन्द्रता ----- है।

16. अतिपरवलय  $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$  के किसी भी बिन्दु से इसकी अनन्तस्पर्शियों पर डाले गये लम्बों का गुणनफल ----- है।

17. यदि आयतीय अतिपरवलय  $xy=c^2$  के बिन्दुओं  $\left( ct_i, \frac{c}{t_i} \right) i=1,2,3,4$  पर अभिलम्ब बिन्दु (3, 4) पर मिलते हैं, तो  $t_1 t_2 t_3 t_4 = \dots$

## Exercise -4

### 4-A (पूर्ववर्ती JEE परीक्षा प्रश्न)

#### IIT-JEE- 2008

1. अतिपरवलय (hyperbola)  $x^2 - 2y^2 - 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y - 6 = 0$  की एक शाखा लीजिये जिसका शीर्ष बिन्दु (vertex) A पर है। माना इसके नाभिलंब (latus rectum) का एक अन्त्य बिन्दु (end point B) है। यदि अतिपरवलय की बिन्दु A से निकटतम नाभि (focus) बिन्दु C पर है, तो त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल निम्न है
- (A)  $1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$                       (B)  $\sqrt{\frac{3}{2}} - 1$                       (C)  $1 + \sqrt{\frac{2}{3}}$                       (D)  $\sqrt{\frac{3}{2}} + 1$

#### IIT-JEE-2007

2. किसी अतिपरवलय के अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई  $2\sin\theta$  है तथा अतिपरवलय एवं दीर्घवृत्त  $3x^2 + 4y^2 = 12$  के नाभि समान है, तो अतिपरवलय का समीकरण है –
- (A)  $x^2 \operatorname{cosec}^2\theta - y^2 \sec^2\theta = 1$                       (B)  $x^2 \sec^2\theta - y^2 \operatorname{cosec}^2\theta = 1$   
 (C)  $x^2 \sin^2\theta - y^2 \cos^2\theta = 1$                       (D)  $x^2 \cos^2\theta - y^2 \sin^2\theta = 1$

#### 3. स्तम्भ-I

- (A) दो प्रतिच्छेदी वृत्त  
 (B) दो परसपर बाह्य वृत्त  
 (C) यदि एक वृत्त, दूसरे वृत्त के अंदर स्थित है।  
 (D) अतिपरवलय की दो शाखाएँ

#### स्तम्भ-II

- (p) एक उभयनिष्ठ  
 (q) एक उभयनिष्ठ अभिलम्ब  
 (r) कोई उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा नहीं  
 (s) कोई उभयनिष्ठ अभिलम्ब नहीं

#### IIT-JEE-2006

4. एक अतिपरवलय दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  की नाभियों से गुजरता है। उसके अनुप्रस्थ तथा संयुग्मी अक्ष क्रमशः दीर्घवृत्त के दीर्घ तथा अक्षों के साथ सम्पाती हैं। यदि अतिपरवलय तथा दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रताओं का गुणनफल 1 हो, तो –
- (A) अतिपरवलय का समीकरण  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  है।                      (B) अतिपरवलय का समीकरण  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$  है।  
 (C) अतिपरवलय की नाभि (5,0) है।                      (D) अतिपरवलय की नाभि  $(5\sqrt{3}, 0)$  है।

#### IIT-JEE-2005

5. अतिपरवलय  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$  पर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त  $x^2 + y^2 = 9$  पर स्पर्श रेखाएँ खींची जाती हैं। स्पर्श जीवा के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

#### IIT-JEE-2004



6. यदि रेखा  $2x + \sqrt{6}y = 2$  अतिपरवलय  $x^2 - 2y^2 = 4$  की स्पर्श रेखा है, तो स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक हैं –  
 (A)  $(\sqrt{6}, 1)$  (B)  $(2, \sqrt{6})$  (C)  $(1, \sqrt{6})$  (D)  $(4, -\sqrt{6})$

**IIT-JEE-2003**

7. दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{B^2} = 1$  का नाभि एवं अतिपरवलय  $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = \frac{1}{25}$  का नाभि सम्पाती हो, तो  $b^2$  का मान है—  
 (A) 9 (B) 1 (C) 5 (D) 7
8. अतिपरवलय  $\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 1$  के लिए  $\alpha$  को परिवर्तित करने पर निम्नलिखित में से कौन सी राशि अचर होगी –  
 (A) शीर्षों के भुज (B) नाभियों के भुज (C) उत्केन्द्रता (D) नियता

**IIT-JEE-2002**

9.  $y^2 = 8x$  और  $xy = -1$  के उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण है –  
 (A)  $3y = 9x + 2$  (B)  $y = 2x + 1$  (C)  $2y = x + 8$  (D)  $y = x + 2$

**IIT-JEE-1999**

10. यदि  $x=9$  अतिपरवलय  $x^2 - y^2 = 9$  की स्पर्श जीवा है, तो इस स्पर्श जीवा के संगत स्पर्श रेखा युग्म का समीकरण है –  
 (A)  $9x^2 - 8y^2 + 18x - 9 = 0$  (B)  $9x^2 - 8y^2 - 18x + 9 = 0$   
 (C)  $9x^2 - 8y^2 - 18x - 9 = 0$  (D)  $9x^2 - 8y^2 + 18x + 9 = 0$
11. माना कि  $P(a \sec \theta, b \tan \theta)$  और  $Q(a \sec \phi, b \tan \phi)$  जहाँ  $\theta + \phi = \frac{\pi}{2}$  अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  पर कोई दो बिन्दु है। यदि P व Q पर अभिलम्बों का प्रतिच्छेद बिन्दु  $(h, k)$  है, तो  $k =$   
 (A)  $\frac{a^2 + b^2}{a}$  (B)  $-\frac{(a^2 + b^2)}{a}$  (C)  $\frac{a^2 + b^2}{b^2}$  (D)  $-\frac{(a^2 + b^2)}{b}$

**IIT-JEE-1998**

12. यदि वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2$  अतिपरवलय  $xy = c^2$  को चार बिन्दुओं  $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$  व  $R(x_3, y_3)$ ,  $S(x_4, y_4)$  पर प्रतिच्छेद करता है, तो  $R(x_3, y_3)$ ,  $S(x_4, y_4)$   
 (A)  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$  (B)  $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$   
 (C)  $x_1 x_2 x_3 x_4 = c^4$  (D)  $y_1 y_2 y_3 y_4 = c^4$
13. बिन्दु P से परवलय  $y^2 = 4ax$  पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के मध्य कोण  $45^\circ$  है। प्रदर्शित कीजिए कि बिन्दु P का बिन्दुपथ एक अतिपरवलय है।

**IIT-JEE-1997**

14. एक चर सरल रेखा जिसकी प्रवणता 4 है, अतिपरवलय  $xy = 1$  को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो प्रतिच्छेदी बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 1 : 2 में विभाजित करता है।

4-B (पूर्ववर्ती AIEEE/DCE परीक्षा प्रश्न)

15. अतिपरवलय  $\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 1$  के लिये निम्न में से कौन सा परिवर्तित रहता है, 'a' के परिवर्तन के साथ ?  
(A) उत्केन्द्रता (B) नियता (C) शीर्ष का x-निर्देशांक (D) नाभियों का x-निर्देशांक
16. अगर रेखा  $y = \alpha x + \beta$  अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  की स्पर्श रेखा है तो बिन्दु  $P(\alpha, \beta)$  का बिन्दुपथ है –  
(A) अतिपरवलय (B) परवलय (C) वृत्त (D) दीर्घवृत्त
17. यदि e व e' अतिपरवलय और इसके संयुग्मी अतिपरवलय की उत्केन्द्रता है, तब  $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} =$   
(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) इनमें से कोई नहीं
18. अतिपरवलय  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$  पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की निर्वेष अक्षों के साथ समान कोण बनाती है, का समीकरण होगा –  
(A)  $y = x + 1$  (B)  $y = x - 1$  (C)  $y = x + 2$  (D)  $y = x - 2$
19. अगर अतिपरवलय दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  की नाभि से गुजरता है और अतिपरवलय की संयुग्मी अक्ष दीर्घवृत्त की लघु अक्ष के सम्पाती है, तथा अतिपरवलय और दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रताओं का गुणनफल 1 है, तब  
(A) अतिपरवलय का समीकरण  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  है। (B) अतिपरवलय का समीकरण  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$  है।  
(C) अतिपरवलय का समीकरण  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  है। (D) अतिपरवलय का नाभि  $(5\sqrt{3}, 0)$  है।

## Answers

### EXERCISE # 1-A

1. B 2. B 3. C 4. C 5. A 6. A 7. B  
 8. A 9. D 10. A 11. C D

### EXERCISE # 1-B

1.  $7x^2 - 2y^2 + 12xy - 2x + 14y - 22 = 0$   
 3.  $3x^2 - y^2 - 12 = 0$   
 4.  $a^2 = 25/2 ; b^2 = 16$   
 5.  $x + y \pm 3\sqrt{3} = 0$   
 6.  $y = \frac{5}{12}x + \frac{3}{4} ; x - 3 = 0 ; 8 \text{ sq. unit}$   
 10.  $x - 2y + 1 = 0 ; 2x + y + 1 = 0 ;$   
 $2x^2 - 3xy - 2y^2 + 3x - y - 6 = 0 ;$   
 $3x - y + 2 = 0 ; x + 3y = 0$   
 12.  $5x^2 - y^2 = 6$

### EXERCISE # 2-A

1. B 2. D 3. D 4. D 5. A 6. A  
 7. BC 8. BC 9. AD 10. ABC 11. ABCD

### EXERCISE # 2-B

9.  $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2 + b^2}$  10.  $(-4, 3) \& \left(-\frac{4}{7}, -\frac{3}{7}\right)$

### EXERCISE # 3

1. (A) – (q), (B) – (p,q,r,s), (C) – (s), (D) – (p)  
 2. (A) → (q), (B) → (p), (C) → (q), (D) → (s)  
 3. D 4. B 5. D 6.1 B 6.2 D 6.3 B 7.1 C  
 7.2 B 7.3 A 8. False 9. True 10. False  
 11. True 12. True 13.  $\frac{2a^2}{b}$  14.  $2 \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$   
 15.  $\sqrt{3}$  16.  $\frac{144}{25}$

### EXERCISE # 4

1. B 2. A  
 3. (A) → p,q, (B) → p,q, (C) → q,r, (D) → q,r  
 4. AC 5.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = \left(\frac{x^2 + y^2}{9}\right)^2$  6. D 7. D  
 8. B 9. D 10. B 11. D 12. ABCD  
 14.  $16x^2 + 10xy + y^2 = 2$  15. D 16. A 17. B  
 18. A 19. A

## MQB

### EXERCISE # 1 (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक सही विकल्प

1. यदि  $m$  एक चर है, तो सरल रेखाओं  $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = m$  तथा  $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{1}{m}$  के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ है –  
 (A) परवलय (B) दीर्घवृत्त (C) अतिपरवलय (D) इनमें से कोई नहीं
  
2.  $(3,0)$  तथा  $(3\sqrt{2}, 2)$  से गुजरने वाले अतिपरवलय जिसके मुख्य अक्ष, निर्देशी अक्ष है, की उत्केन्द्रता होगी –  
 (A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{\sqrt{13}}{3}$  (C)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$  (D)  $\frac{2}{3}$
  
3. यदि दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  तथा अतिपरवलय  $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = \frac{1}{25}$  की नाभियों सम्पाती है तो  $b^2$  का मान है –  
 (A) 4 (B) 9 (C) 16 (D) इनमें से कोई नहीं
  
4. वक्रों जिनके प्राचलिक समीकरण  $x=t^2+1$ ,  $y=2t$  और  $x=25$ ,  $y=2s$  है, के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक हैं–  
 (A)  $(4,1)$  (B)  $(2,2)$  (C)  $(-2,2)$  (D)  $(1,0)$
  
5. यदि अतिपरवलय  $xy=c^2$  के बिन्दु  $P(x_1, y_1)$  पर खींची गई स्पर्श रेखा निर्देशी अक्षों को बिन्दु Q व R पर मिलती है, तो  $\Delta OQR$  के परिकेन्द्र के निर्देशांक होंगे –  
 (A)  $(0,0)$  (B)  $(x_1, y_1)$  (C)  $\left(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2}\right)$  (D)  $\left(\frac{2x_1}{3}, \frac{2y_1}{3}\right)$
  
6. एक स्थिर बिन्दु  $(\alpha, \beta)$  से गुजरने वाली अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  की जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ है –  
 (A) एक वृत्त जिसका केन्द्र  $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$  है। (B) एक दीर्घवृत्त जिसका केन्द्र  $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$  है।

(C) एक अतिपरवलय जिसका केन्द्र  $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$  है।

(D) एक सरल रेखा जो बिन्दु  $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$  से गुजरती है।

7. अतिपरलय  $H_1 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  के किसी बिन्दु से अतिपरवलय  $H_2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2$  पर स्पर्श रेखाएँ खींची गई हैं। स्पर्श जीवा और  $H_2$  की अनंतस्पर्षियों के मध्य का क्षेत्रफल होगा –

- (A)  $ab$  (B)  $2ab$  (C)  $4ab$  (D)  $8ab$

8. यदि दो शांकव  $a_1x^2 + 2h_1xy + b_1y^2 = c_1$  व  $a_2x^2 + 2h_2xy + b_2y^2 = c_2$  चार सम चकीय बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो –

- (A)  $(a_1 - b_1)h_2 = (a_2 - b_2)h_1$  (B)  $(a_1 - b_1)h_1 = (a_2 - b_2)h_2$   
 (C)  $(a_1 + b_1)h_2 = (a_2 + b_2)h_1$  (D)  $(a_1 + b_1)h_1 = (a_2 + b_2)h_2$

9. एक अतिपरवलय की संयुग्मी व अनुप्रस्थ की समीकरण क्रमशः  $x + 2y - 3 = 0$  एवं  $2x - y + 4 = 0$  है तथा उनकी लम्बाइयों क्रमशः  $\sqrt{2}$  व  $2/\sqrt{3}$  है, तो अतिपरवलय की समीकरण है –

- (A)  $\frac{2}{5}(x + 2y - 3)^2 - \frac{3}{5}(2x - y + 4)^2 = 1$  (B)  $\frac{2}{5}(2x - y + 4)^2 - \frac{3}{5}(x + 2y - 3)^2 = 1$   
 (C)  $2(2x - y + 4)^2 - 3(x + 2y - 3)^2 = 1$  (D)  $2(x + 2y - 3)^2 - 3(2x - y + 4)^2 = 1$

10. आयतीय अतिपरवलय  $xy = a^2$  की जीवा PQ, x-अक्ष को बिन्दु A पर मिलती है तथा C, PQ का मध्य बिन्दु O मूल बिन्दु है तब त्रिभुज ACO है –

- (A) समबाहु (B) समद्विबाहु (C) समाक्रेण (D) समकोण समद्विबाहु

11. यदि कोई बिन्दु P अतिपरवलय  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$  और वृत्त जिसका व्यास अतिपरवलय की नाभियों को मिलाने वाला रेखाखण्ड है का उभयनिष्ठ बिन्दु है, तो बिन्दु P की नाभियों दूरियों का योग है –

- (A)  $6\sqrt{2}$  (B)  $2\sqrt{66}$  (C) 16 (D) 8

12. एक अतिपरवलय के अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई  $2a$  है व शीर्ष, केन्द्र व संगत नाभि के मध्य अक्ष के रेखाखण्ड को 2 : 1 में विभाजित करता है, तो अतिपरवलय का समीकरण है –

- (A)  $4x^2 - 5y^2 = 4a^2$  (B)  $4x^2 - 5y^2 = 5a^2$  (C)  $5x^2 - 4y^2 = 4a^2$  (D)  $5x^2 - 4y^2 = 5a^2$

13. यदि अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  की एक द्विकोटि AB इस प्रकार है कि त्रिभुज OAB (O मूलबिन्दु है) एक समबाहु त्रिभुज है, तो अतिपरवलय की उत्केन्द्रता  $e$  है –

- (A)  $e > \sqrt{3}$  (B)  $1 < e < 2\frac{2}{\sqrt{3}}$  (C)  $e = \frac{2}{\sqrt{3}}$  (D)  $e > \frac{2}{\sqrt{3}}$

14. यदि  $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$  अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2a^2} = 1$  एक चर जीवा इस प्रकार है कि यह अतिपरवलय के केन्द्र पर समकोण बनाती है, तो यह जीवा एक स्थिर वृत्त को स्पर्श करती है जिसकी त्रिज्या है –

- (A)  $\sqrt{2}a$  (B)  $\sqrt{3}a$  (C)  $2a$  (D)  $\sqrt{5}a$

एक या अधिक सही सही विकल्प

15.  $9x^2-16y^2=144$  और  $x^2+y^2=9$  की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है -

- (A)  $y = \frac{3}{\sqrt{7}x} + \frac{15}{\sqrt{7}}$  (B)  $y = 3\sqrt{\frac{2}{7}}x + \frac{15}{\sqrt{7}}$   
 (C)  $y = 2\sqrt{\frac{3}{7}}x + 15\sqrt{7}$  (D)  $y = 3\sqrt{\frac{2}{7}}x - \frac{15}{\sqrt{7}}$

16. निर्देशी अक्षों को मुख्य अक्ष लेते हुए, अतिपरवलय का समीकरण जिसके एक शीर्ष की नाभियों से दूरी क्रमशः 3 व 1 है, होगा-

- (A)  $3x^2-y^2=3$  (B)  $x^2-3y^2+3=0$  (C)  $x^2-3y^2+3=0$  (D) इनमें से कोई नहीं

17. रेखा  $y=x$  के समान्तर आयतीय अतिपरवलय  $xy=c^2$  की जीवाओं को व्यास मानकर वृत्त खींचे जाते हैं। ऐसे सभी वृत्त दो स्थिर बिन्दुओं से गुजरते हैं जिनके निर्देशांक हैं -

- (A) (c, c) (B) (c, -c) (C) (-c, c) (D) (-c, -c)

18. अतिपरवलय  $x^2-3y^2=3$  के बिन्दु  $(\sqrt{3}, 0)$  पर स्पर्श रेखा दोनों अननतस्पर्शियों के साथ मिलकर निर्मित करती है -

- (A) समद्विबाहु त्रिभुज (B) समबाहु त्रिभुज (C)  $\sqrt{3}$  वर्ग इकाई क्षेत्रफल का त्रिभुज (D) समद्विबाहु समकोण त्रिभुज

19. समीकरण  $16x^2-3y^2-32x+12y-44=0$  एक अतिपरवलय को प्रदर्शित करता है -

- (A) जिसके अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई  $4\sqrt{3}$  है। (B) जिसके संयुग्मी अक्ष की लम्बाई 4 है।  
 (C) जिसका केन्द्र (1, 2) है। (D) जिसकी उत्केन्द्रता  $\sqrt{\frac{19}{3}}$  है।

20. एक बिन्दु इस प्रकार से गमन करता है कि उसकी किसी आयत की  $a$  लम्बाई की दो भुजाओं से दूरियों के वर्गों का योग  $b$  लम्बाई की शेष दो भुजाओं से दूरियों के वर्गों के योग का दुगुना है, तो इस बिन्दु का बिन्दुपथ है-

- (A) एक वृत्त (B) एक दीर्घवृत्त (C) एक अतिपरवलय (D) एक रेखा युग्म

21. निम्न में से कौनसे प्राचलिक समीकरण एक अतिपरवलयिक वक्र को प्रदर्शित कर सकती हैं, जहाँ 't' एक प्राचल है -

- (A)  $x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$  &  $y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$  (B)  $\frac{tx}{a} - \frac{y}{b} + t = 0$  &  $\frac{x}{a} + \frac{ty}{b} - 1 = 0$   
 (C)  $x = e^t + e^{-t}$  &  $e^t - e^{-t}$  (D)  $x^2 - 6 = 2\cos t$  &  $y^2 + 2 = 4\cos^2 \frac{t}{2}$

22.  $m$  का वह मान जिसके लिए रेखा  $y = mx + 6$  अतिपरवलय  $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{49} = 1$  की स्पर्श रेखा है, है -

(A)  $\sqrt{\left(\frac{17}{20}\right)}$  (B)  $-\sqrt{\left(\frac{17}{20}\right)}$  (C)  $\sqrt{\left(\frac{20}{17}\right)}$  (D)  $-\sqrt{\left(\frac{20}{17}\right)}$

**EXERCISE # 2 (विषयात्मक प्रश्न)**

- यदि अतिपरवलय के केन्द्र के बीच की दूरी  
 $x^2-16xy-11y^2-12x+6y+21=0$  .....(i)  
 $9x^2-16y^2-18x-32y-151=0$  .....(ii) है, तो  $125 d^2=$ .....
- यदि  $m_1$  एवं  $m_2$  अतिपरवलय  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$  के स्पर्श रेखा की प्रवणता है जो कि  $3x-4y=5$  तथा  $x^2-4y^2=5$  के स्पर्श बिन्दु से गुजरती है, तो  $32(m_1+m_2-m_1m_2)=$ .....
- नियामक वृत्त के त्रिज्या निकाले जो कि सरल रेखा  $\frac{x}{25} - \frac{y}{24} = m$ ,  $\frac{x}{25} + \frac{y}{24} = \frac{1}{m}$  के प्रतिच्छेद बिन्दु के बिन्दुपथ है।
- यदि अतिपरवलय  $x^2-y^2=a^2$  पर बिन्दुओं  $P(a \sec \theta, a \tan \theta)$  व  $Q(a \sec \phi, a \tan \phi)$  को मिलाने वाली जीवा बिन्दु P पर अभिलम्ब है, तो सिद्ध कीजिए कि  $\tan \phi = \tan \theta (4 \sec^2 \theta - 1)$
- अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात करें जिसकी नियता, वृत्त  $x^2+y^2-4x-6y+9=0$  का अभिलम्ब है तथा प्रवणता 2 है और उत्केन्द्रता दिये हुए वृत्त की त्रिज्या है जबकि अतिपरवलय की नाभियों वृत्त का केन्द्र है।
- यदि अतिपरवलय  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  के किसी बिन्दु  $(3 \sec \phi, 4 \tan \phi)$  से स्पर्श रेखा खींची जाती है जो कि  $3x+8y-12=0$  पर लम्ब है, तो  $\phi$  का मान है। (in degree)
- यदि अतिपरवलय  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  का केन्द्र C है, तथा अतिपरवलय के किसी बिन्दु P से स्पर्श रेखा खींची जाती है जो कि सरल रेखा  $4x-3y=0$  तथा  $4x+3y=0$  को क्रमशः Q एवं R पर काटती है तो  $CQ \cdot CR=$
- वृत्त  $x^2+y^2=16$  के किसी जीवा का मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ निकालें जो कि अतिपरवलय  $9x^2-16y^2=144$  का स्पर्श रेखा है।

## Answers

**EXERCISE # 1**

1. C 2. B 3. C 4. B 5. B 6. C 7. C  
 8. A 9. B 10. B 11. B 12. D 13. D 14. A  
 15. BD 16. AB 17. AD 18. BC 19. BCD 20. CD  
 21. ACD 22. AB

**EXERCISE # 2**

1. 0025 2. 0022 3. 0007

Download FREE Study Package from [www.TekoClasses.com](http://www.TekoClasses.com) & Learn on Video  
[www.MathsBySuhag.com](http://www.MathsBySuhag.com) Phone :0 903 903 7779, 98930 58881

5.  $11x^2 - y^2 + 4x - 16xy + 38y - 61 = 0$

6. 0030 7. 0025 8.  $(x^2 + y^2)^2 = 16x^2 - 9y^2$

**for 39 Yrs. Que. of IIT-  
JEE(ADVANCE)**

**&**

**15 Yrs. Que. of  
AIEEE(MAIN)  
we have distributed  
already a book**