

विध्न विचारत भीरु जन, नहीं आरम्भे काम,  
विपति देख छोड़े तुरंत मध्यम मन कर श्याम।  
पुरुष सिंह संकल्प कर, सहते विपति अनेक,  
'बना' न छोड़े ध्येय को, रघुबर राखे टेक।।

रचित: मानव धर्म प्रणेता

सद्गुरु श्री रणछोड़दासजी महाराज

## त्रिविम निर्देशांक ज्यामिति

(THREE DIMENSIONAL GEOMETRY)

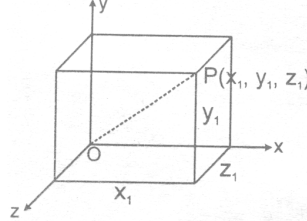
.....  
*Nature is an infinite sphere of which the centre is everywhere and the circumference nowhere .....Pascal, Blaise*  
.....

### समष्टि में स्थित बिन्दु के निर्देशांक

समष्टि में अनन्त बिन्दु हैं। हम प्रत्येक बिन्दु की स्थिति को तीन परस्पर लम्बवत् निर्देशांक अक्षों OX, OY और OZ की सहायता से ज्ञात करना चाहते हैं।

तीन परस्पर लम्बवत् रेखाओं OX, OY एवं OZ को तीन अक्ष माना जाता है। x और y अक्षों की सहायता से बनाया गया समतल, x-y समतल कहलाता है। इसी प्रकार y और z अक्ष y-z समतल और z और x अक्ष, x-z समतल बनाते हैं।

माना कि समष्टि में एक बिन्दु P है, जिससे x-y समतल पर लम्ब डालते हैं, तो इस लम्ब की बीजीय लम्बाई को बिन्दु P का z निर्देशांक मानते हैं और लम्बपाद से x और y अक्ष पर लम्ब डालते हैं। इन लम्बों की बीजीय लम्बाई बिन्दु P के क्रमशः x और y निर्देशांक हैं।



### समष्टि में एक बिन्दु का सदिश निरूपण (Vector representation of a point in space) :

यदि समष्टि में बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) हो, तो मूल बिन्दु से संदर्भ में बिन्दु P का स्थिति सदिश  $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  होता है।

### दूरी सूत्र (Distance formula) :

दो बिन्दुओं  $(x_1, y_1, z_1)$  और  $(x_2, y_2, z_2)$  के मध्य दूरी

$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$  से निरूपित की जाती है।

### सदिश विधि (Vector method) :

यदि बिन्दुओं A और B के स्थिति सदिश क्रमशः  $\vec{OA}$  और  $\vec{OB}$  हो तो

$$|AB| = |\vec{OB} - \vec{OA}|$$

$$\Rightarrow |AB| = |(x_2i + y_2j + z_2k) - (x_1i + y_1j + z_1k)|$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

**बिन्दु P की निर्देशांक अक्षों से दूरी (Distance of a point P from coordinate axes) :**

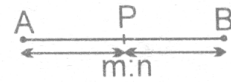
माना कि बिन्दु P(x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>, z<sub>1</sub>) की निर्देशांक अक्षों OX, OY और OZ से दूरी क्रमशः PA, PB और PC हो तो

$$PA = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad PB = \sqrt{z^2 + x^2}, \quad PC = \sqrt{x^2 + y^2}$$

**विभाजन सूत्र (Section Formula) :**

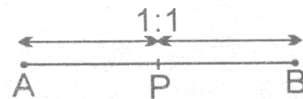
यदि बिन्दु P बिन्दुओं A(x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>, z<sub>1</sub>) और B(x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>, z<sub>2</sub>) के मध्य दूरी को m : n अनुपात में विभाजित करता है, तो P के निर्देशांक

$$\left( \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n} \right) \text{ है।}$$



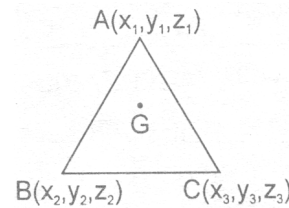
नोट : मध्य बिन्दु

$$\left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$



**त्रिभुज का केन्द्रक (Centroid of a triangle) :**

$$G \equiv \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right)$$



**त्रिभुज ABC का अन्तः केन्द्र (Incentre of triangle ABC) :**

$$\left( \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}, \frac{az_1 + bz_2 + cz_3}{a+b+c} \right)$$

जहाँ |AB| = c, |BC| = a, |CA| = b

**चतुष्फलक का केन्द्रक (Centroid of a tetrahedron) :**

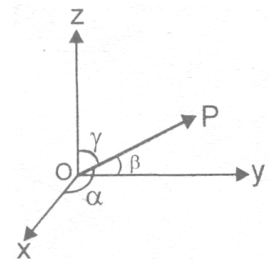
A(x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>, z<sub>1</sub>) B(x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>, z<sub>2</sub>) C(x<sub>3</sub>, y<sub>3</sub>, z<sub>3</sub>) और D(x<sub>4</sub>, y<sub>4</sub>, z<sub>4</sub>) एक चतुष्फलक के शीर्ष हो, तो इसके केन्द्रक (G)

के निर्देशांक  $\left( \frac{\sum x_i}{4}, \frac{\sum y_i}{4}, \frac{\sum z_i}{4} \right)$  होते हैं।

**दिक्कोज्याएँ एवं दिक् अनुपात (Direction Cosines And Direction Ratios) :**

- (i) दिक्कोज्याएँ : यदि कोई रेखा निर्देशांक अक्षों की धनात्मक दिशा से क्रमशः कोण  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  बनाती है, तो  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  दी गई रेखा की दिक्कोज्याएँ कहलाती हैं जिन्हें  $l, m, n$  से निरूपित किया जाता है। अतः
- $$l = \cos \alpha, m = \cos \beta, n = \cos \gamma.$$

- (ii) यदि  $l, m, n$  किसी सरल रेखा की दिक्कोज्याएँ हैं, तो  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$  होगा।



- (iii) दिक्अनुपात : माना  $a, b, c$ , दिक्कोज्याओं  $l, m, n$  के समानुपाती हैं तो  $a, b, c$  दिक्अनुपात कहलाते हैं। यदि  $a, b, c$ , किसी रेखा  $L$  के दिक्अनुपात हो, तो सदिष  $a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$  रेखा  $L$  के समान्तर होगा।  
 यदि  $l, m, n$  किसी सरल रेखा  $L$  की दिक्कोज्याएँ हो, तो एकांक सदिष  $l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$ , सरल रेखा  $L$  के समान्तर होता है।
- (iv) यदि  $l, m, n$  दिक्कोज्याएँ हैं और  $a, b, c$  सदिष के दिक्अनुपात हो, तो
- $$\left( l = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, m = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, n = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)$$
- या  $l = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, m = \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, n = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
- (v) यदि  $OP=r$ , जबकि  $O$  मूल बिन्दु है और  $OP$  की दिक्कोज्याएँ  $l, m, n$  हो, तो  $P$  के निर्देशांक  $(lr, mr, nr)$  होंगे।  
 यदि रेखा  $AB$  की दिक्कोज्याएँ  $l, m, n$  हो तथा  $|AB|=r$  और  $A$  के निर्देशांक  $(x_1, y_1, z_1)$  हो, तो  $B$  के निर्देशांक  $(x_1 + rl, y_1 + rm, z_1 + rn)$  होंगे।
- (vi) यदि  $P$  और  $Q$  के निर्देशांक  $(x_1, y_1, z_1)$  और  $(x_2, y_2, z_2)$  हो, तो रेखा  $PQ$  के दिक्अनुपात  $a=x_2-x_1$ ,  $b=y_2-y_1$ , और  $c=z_2-z_1$  होंगे तथा रेखा  $PQ$  की दिक्कोज्याएँ
- $$l = \frac{x_2 - x_1}{|PQ|}, m = \frac{y_2 - y_1}{|PQ|} \text{ और } n = \frac{z_2 - z_1}{|PQ|} \text{ होगी।}$$
- (vii) अक्षों की दिक्कोज्याएँ : धनात्मक  $x$ - अक्ष  $x, y$  और  $z$  अक्ष के साथ क्रमशः  $0^\circ, 90^\circ, 90^\circ$  कोण बनाता है  
 $x$ -अक्ष की दिक्कोज्याएँ  $(1, 0, 0)$  हैं।  
 $y$ -अक्ष की दिक्कोज्याएँ  $(0, 1, 0)$  हैं।  
 $z$ -अक्ष की दिक्कोज्याएँ  $(0, 0, 1)$  हैं।

#### दो रेखाखण्डों के मध्य कोण (Angle Between Two Line Segments) :

यदि दो रेखाओं के दिक्अनुपात क्रमशः  $a_1, b_1, c_1$  और  $a_2, b_2, c_2$  हो तो दो सदिष  $a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$  और  $a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$  जो दी गई रेखाओं के समान्तर हैं, के मध्य कोण निम्न प्रकार से दिया जाता है -

$$\cos \theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

- (i) यदि  $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$
- (ii) यदि  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$  हो, तो रेखाएँ समान्तर होंगी
- (iii) यदि  $l_1 = l_2, m_1 = m_2, n_1 = n_2$  हो, तो समान्तर रेखाओं की दिक्कोज्याएँ समान होंगी।

#### रेखाखण्ड का सरल रेखा पर प्रक्षेप (Projection off a line segment on a line) :

- (i) यदि  $P$  और  $Q$  के निर्देशांक क्रमशः  $(x_1, y_1, z_1)$  और  $(x_2, y_2, z_2)$  हैं तो रेखाखण्ड  $PQ$  का रेखा, जिसकी दिक्कोज्याएँ  $l, m, n$  हैं, प्रक्षेप  $|l(x_2 - x_1) + m(y_2 - y_1) + n(z_2 - z_1)|$  होगा।
- (ii) सदिष रूप : एक सदिष  $\vec{a}$  का दूसरे सदिष  $\vec{b}$  पर प्रक्षेप  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$

Download FREE Study Package from [www.TekoClasses.com](http://www.TekoClasses.com) & Learn on Video  
[www.MathsBySuhag.com](http://www.MathsBySuhag.com) Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

उपर दी गई स्थिति में  $\vec{a}$  के स्थान  $\vec{PQ} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$  तथा  $\vec{b}$  के स्थान पर  $l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$  लिखा जा सकता है।

(iii)  $l|\vec{r}|, m|\vec{r}|$  तथा  $n|\vec{r}|$  सदिश  $\vec{r}$  के क्रमशः OX, OY तथा OZ अक्षों पर प्रक्षेप है।

(iv)  $\vec{r} = |\vec{r}|(l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k})$

---

### (समतल) A PLANE

यदि किसी एक सतह पर स्थित कोई भी दो बिन्दुओं को मिलाने से प्राप्त सरल रेखा पूर्णतः इसी सतह पर स्थित हो, तो इस सतह को समतल कहते हैं। OR

यदि किसी सतह पर स्थित कोई भी दो बिन्दुओं को मिलाने से प्राप्त सरल रेखा, किसी नियत सरल रेखा के लम्बवत् हो, तो इस सतह को समतल कहते हैं। तथा नियत सरल रेखा को समतल का अभिलम्ब कहते हैं।

---

समतल का समीकरण (Equation of a plane) :

- (i) समतल की अभिलम्ब रूप में समीकरण  $lx + my + nz = p$  होता है, जहाँ  $l, m, n$  समतल पर अभिलम्ब की दिक्कोज्याएँ हैं और  $p$  समतल की मूल बिन्दु से दूरी है।
- (ii) समतल का व्यापक रूप में समीकरण  $ax + by + cz + d = 0$  होता है जहाँ  $a, b, c,$  समतल पर अभिलम्ब के दिक्कअनुपात हैं।
- (iii) बिन्दु  $(x_1, y_1, z_1)$  से गुजरने वाले समतल का समीकरण  $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$  होता है, जहाँ  $a, b, c$  समतल पर अभिलम्ब के दिक्कअनुपात हैं।
- (iv) तीन असंरेखीय बिन्दुओं  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$  से गुजरने वाले समतल का समीकरण

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ होता है।}$$

- (v) अन्तः खण्ड रूप में अक्षों पर  $a, b, c$  अन्तः खण्ड काटने वाले समतल का समीकरण  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  होता है।
- (vi) सदिश रूप में उस समतल का समीकरण जो एक दिये गये बिन्दु से गुजरता है, जिसका स्थिति सदिश  $\vec{a}$  है और जो सदिश  $\vec{n}$  के लम्बवत् है।  
 $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$  या  $\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n}$  होता है।

नोट : (a) मूल बिन्दु से  $d$  दूरी पर, इकाई सदिश  $\hat{n}$  के लम्बवत् एक समतल का सदिश समीकरण  $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$  होता है।

(b) निर्देशी समतल :

- (i)  $yz$ -समतल का समीकरण  $x=0$  है।  
(ii)  $xz$ -समतल का समीकरण  $y=0$  है।  
(iii)  $xy$ -समतल का समीकरण  $z=0$  है।

(c) अक्षों के समान्त समतल :

यदि  $a=0$  हो, तो समतल  $x$ -अक्ष के समान्तर होगा अर्थात्  $x$ -अक्ष के समान्तर समतल का समीकरण  $by + cz + d = 0$  होता है।

इसी प्रकार  $y$ -अक्ष और  $z$ -अक्ष के समान्तर समतल के समीकरण क्रमशः  $az + cz + d = 0$  और  $ax + by + d = 0$  होते हैं।

(d) मूल बिन्दु से गुजरने वाला समतल : मूल बिन्दु से गुजरने वाले समतल का समीकरण  $ax + by + cz = 0$  होता है।

(e) समतल के समीकरण का अभिलम्ब रूप में रूपान्तरण : समीकरण  $ax + by + cz - d = 0$  को अभिलम्ब रूप में बदलने के लिए, सबसे पहले अचर पद को दाहिनी तरफ लिखते हैं और इसे धनात्मक बनाते हैं। इसके बाद प्रत्येक पद में  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  का भाग दिया जाता है जहाँ  $a, b, c$  क्रमशः  $x, y$  और  $z$  के गुणांक हैं।

$$\text{e.g. } \frac{ax}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{by}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{cz}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{d}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

यदि  $d > 0$  हो, तो (+) चिन्ह लिया जाता है, और  $d < 0$  के लिये (-) चिन्ह लिया जाता है।

Download FREE Study Package from [www.TekoClasses.com](http://www.TekoClasses.com) & Learn on Video  
[www.MathsBySuhag.com](http://www.MathsBySuhag.com) Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

- (f) समतल  $ax+by+cz=0$  के समान्तर एक समतल का समीकरण  $ax+by+cz+\lambda=0$  से दिया जाता है। दो समान्तर समतलों  $ax+by+cz+d_1=0$  और

$$ax+by+cz+d_2=0 \text{ के मध्य दूरी } \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \text{ से दी जाती है।}$$

- (g) उस समतल का समीकरण जो दिये गये बिन्दु से गुजरता है और दिये गए सदिश के समान्तर है :  
 बिन्दु, जिसका स्थिति सदिश  $\vec{a}$  है से गुजरने वाले और सदिश  $\vec{b}$  और  $\vec{c}$  के समान्तर समतल का समीकरण  $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$  द्वारा दिया जाता है। (प्राचलिक रूप में) जहाँ  $\lambda$  और  $\mu$  अदिश है।  
 या  $\vec{r} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  (अप्राचलिक रूप में)

- (h) समतल  $ax+by+cz+d=0$  बिन्दुओं  $(x_1, y_1, z_1)$  और  $(x_2, y_2, z_2)$  को जोड़ने वाली रेखा को अनुपात  $\left( \frac{-ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{-ax_2 + by_2 + cz_2 + d} \right)$  में विभाजित करता है।

- (i)  $xy$  समतल, बिन्दुओं  $(x_1, y_1, z_1)$  और  $(x_2, y_2, z_2)$  को जोड़ने वाली रेखा को  $-\frac{z_1}{z_2}$  अनुपात में विभाजित करता है। इसी प्रकार इसकी सरल रेखा को  $yz$  समतल अनुपात  $-\frac{x_1}{x_2}$  में और  $zx$  समतल अनुपात  $-\frac{y_1}{y_2}$  में विभाजित करता है।

- (j) चार बिन्दुओं की समतलता –  
 बिन्दु  $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$  और  $D(x_4, y_4, z_4)$  एक समतल में होंगे यदि

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

इसी प्रकार सदिश विधि में बिन्दु  $A(\vec{r}_1), B(\vec{r}_2), C(\vec{r}_3)$  और  $D(\vec{r}_4)$  समतलीय होंगे यदि  $[\vec{r}_4 - \vec{r}_1, \vec{r}_4 - \vec{r}_2, \vec{r}_4 - \vec{r}_3] = 0$

#### दो बिन्दुओं की समतल के सापेक्ष स्थिति (position of two points w.r. to plane) :

एक समतल त्रिविम समष्टि को दो बराबर भागों में विभाजित करता है। दो बिन्दु  $A(x_1, y_1, z_1)$  और  $B(x_2, y_2, z_2)$  समतल  $ax+by+cz+d=0$  के एक ही ओर होंगे यदि  $ax_1 + by_1 + cz_1 + d$  और  $ax_2 + by_2 + cz_2 + d$  दोनों या तो धनात्मक हों या दोनों ऋणात्मक हों। और यदि दोनों परस्पर विपरीत चिन्ह के हों तो दोनों बिन्दु समतल के विपरीत ओर स्थित होंगे।

#### समतल और बिन्दु (A Plane & A Point) :

- (i) बिन्दु  $(x', y', z')$  की समतल  $ax+by+cz+d=0$  से दूरी  $\frac{ax'+by'+cz'+d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$  द्वारा दी जाती है।  
 (ii) एक बिन्दु जिसका स्थिति सदिश  $\vec{a}$  है, की समतल  $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$  से लम्बवत् दूरी  $p = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n} - d|}{|\vec{n}|}$  होती है।  
 (iii) बिन्दु  $(x, y, z)$  से समतल  $ax+by+cz+d=0$  पर डाले गये लम्ब के पाद के निर्देशांक

$$\frac{x'-x_1}{a} = \frac{y'-y_1}{b} = \frac{z'-z_1}{c} = -\frac{(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)}{a^2 + b^2 + c^2} \text{ से दिए जाते हैं।}$$

- (iv) एक बिन्दु का समतल में प्रतिबिम्ब ज्ञात करना

(To find image of a point w.r.t. a plane) :

माना  $P(x_1, y_1, z_1)$  दिया गया बिन्दु है, और  $ax+by+cz+d=0$  दिया गया समतल है, माना  $(x', y', z')$  प्रतिबिम्ब बिन्दु है। तब

(a)  $x'-x_1 = \lambda a, y'-y_1 = \lambda b, z'-z_1 = \lambda c$   
 $\Rightarrow x' = \lambda a + x_1, y' = \lambda b + y_1, z' = \lambda c + z_1$

(b)  $a\left(\frac{x'+x_1}{2}\right) + b\left(\frac{y'+y_1}{2}\right) + c\left(\frac{z'+z_1}{2}\right) = 0$

(A) से  $x', y', z'$  के मानों को (B) में रखने पर  $\lambda$  का मान प्राप्त करके इसे पुनः  $(x' y' z')$  का मान ज्ञात करने के लिए (A) में रखते हैं।

बिन्दु  $(x_1, y_1, z_1)$  का समतल  $ax+by+cz+d=0$  के सापेक्ष प्रतिबिम्ब

$$\frac{x'-x_1}{a} = \frac{y'-y_1}{b} = \frac{z'-z_1}{c} = -2\frac{(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)}{a^2 + b^2 + c^2} \text{ द्वारा दिया जाता है।}$$

- (iv) दो समान्तर समतलों  $ax+by+cz+d=0$  और  $ax+by+cz+d'=0$  के मध्य दूरी, सूत्र  $\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$  द्वारा दी जाती है।

दो समतलों के मध्य कोण (Angle Between Two Planes) :

- (i) माना दो समतल  $ax+by+cz+d=0$  और  $a'x+b'y+c'z+d'=0$  है। इन समतलों के मध्य कोण इनके अभिलम्बों के मध्य कोण के बराबर होगा। इनके अभिलम्बों के दिक्अनुपात क्रमशः  $(a,b,c)$  और  $(a',b',c')$  हैं, अतः इनके मध्य

कोण  $\theta, \cos \theta = \frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$  द्वारा दिया जाता है।

समतल लम्बवत होंगे  $aa'+bb'+cc'=0$  और समतल होंगे यदि  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

- (ii) समतल  $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = d_1$  और  $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = d_2$  के मध्य कोण  $\theta \cos \theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$  द्वारा दिया जाता है। समतल परस्पर

लम्बवत होंगे यदि  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$  और समान्तर होंगे यदि  $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$

कोण समद्विभाजक (Angle Bisectors) :

- (i) दो दिए गए समतलों  $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$  और  $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$  के मध्य कोण को समद्विभाजित

करने वाले समतल का समीकरण  $\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$  होता है।

- (ii) उस कोण के समद्विभाजक का समीकरण जिसमें मूल बिन्दु स्थित है :



सबसे पहले दोनों अचर पदों को धनात्मक बनाइए, तब  $\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$  में

धनात्मक चिन्ह लेने पर यह मूल बिन्दु को रखने वाले कोण समद्विभाजक का समीकरण देता है।

(ii) न्यूनकोण/अधिककोण का अर्द्धक : सबसे पहले दोनों अचर पदों को धनात्मक बनाइए, तब

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 > 0 \quad \Rightarrow \text{मूल बिन्दु अधिक कोण में है।}$$

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 < 0 \quad \Rightarrow \text{मूल बिन्दु न्यून कोण में है।}$$

### समतल निकाय (Family of Planes) :

(i) समतल जो असमान्तर समतलों  $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  एवं  $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  की कटान रेखा से गुजरता है, या एक दी गई सरल रेखा से गुजरता है, का समीकरण

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda (a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0 \text{ द्वारा दिया जाता है।}$$

(iii) समतल का समीकरण, जो समतलों  $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = d_1$  और  $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = d_2$  की कटान रेखा से गुजरता है,

$$\vec{r} \cdot (n_1 + \lambda n_2) = d_1 + \lambda d_2 \text{ द्वारा दिया जाता है। जहाँ } \lambda \text{ कोई स्वेच्छ अदिश है।}$$

### त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of triangle) :

माना  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)$ ,  $C(x_3, y_3, z_3)$  त्रिभुज के शीर्ष हैं, तो  $\Delta = \sqrt{(\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2)}$

$$\text{जहाँ } \Delta_x = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_y = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ और } \Delta_z = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

सदिश विधि – दो सदिश  $\vec{AB}$  और  $\vec{AC}$  से, क्षेत्रफल =

$$\frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

### चतुष्फलक का आयतन (Volume Of A Tetrahedron) :

एक चतुष्फलक जिसके शीर्ष  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)$ ,  $C(x_3, y_3, z_3)$  और  $D(x_4, y_4, z_4)$  हैं का आयतन

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \text{ द्वारा दिया जाता है।}$$

Download FREE Study Package from [www.TekoClasses.com](http://www.TekoClasses.com) & Learn on Video  
[www.MathsBySuhag.com](http://www.MathsBySuhag.com) Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

रेखा का समीकरण (Equation of A Line) :

- (i) समष्टि में एक सरल रेखा को दो समतल, जो समान्तर नहीं हैं, के कटान से प्रदर्शित किया जाता है, और इसलिए सरल रेखा का समीकरण दो समतलों  $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$  और  $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$  के निकाय का हल है। इसे सरल रेखा का असममित रूप भी कहा जाता है।

- (ii) रेखा का समीकरण, जो बिन्दु  $(X_1, Y_1, Z_1)$  से गुजरती है और जिसके दिक् अनुपात  $a, b, c$  है,  

$$\frac{x - X_1}{a} = \frac{y - Y_1}{b} = \frac{z - Z_1}{c} = r$$
 होता है।  
 इसे सरल रेखा का सममित रूप भी कहते हैं। इस रेखा पर किसी बिन्दु के निर्देशांक  $(x_1+ar, y_1+br, z_1+cr)$  द्वारा दिये जाते हैं।
- (iii) **सदिष समीकरण (Vector equation)** : एक सरल रेखा जो एक ऐसे स्थिर बिन्दु से गुजरती है जिसका स्थिति सदिष  $\vec{a}$  है और एक दिये सदिष  $\vec{b}$  के समान्तर है, का सदिष समीकरण  $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$  होता है। जहाँ  $\lambda$  अदिष है।
- (iv) रेखा का समीकरण जो बिन्दुओं  $(X_1, Y_1, Z_1)$  और  $(X_2, Y_2, Z_2)$  से गुजरती है,  

$$\frac{x - X_1}{X_2 - X_1} = \frac{y - Y_1}{Y_2 - Y_1} = \frac{z - Z_1}{Z_2 - Z_1}$$
 होता है।
- (v) एक सरल रेखा जो दो ऐसे बिन्दुओं से गुजरती है, जिनके स्थिति सदिष क्रमशः  $\vec{a}$  और  $\vec{b}$  हैं का समीकरण सदिष रूप  $\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$  द्वारा दिया जाता है।
- (vi) दी गई सरल रेखा के कार्तीय रूप वाले समीकरण को सदिष रूप में अथवा सदिष रूप वाले समीकरण को कार्तीय रूप में निम्न तरीके से बदल सकते हैं—

$$\frac{x - X_1}{a} = \frac{y - Y_1}{b} = \frac{z - Z_1}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r} = (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}) + \lambda(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k})$$

नोट : सरल रेखाएँ जो निर्देशांक अक्षों के समान्तर हैं —

सरल रेखाएँ	समीकरण	सरल रेखाएँ	समीकरण
(i) मूल बिन्दु से गुजरने वाली	$y=mx, z=nx$	(v) X-अक्ष समान्तर के	$y=p, z=q$
(ii) X-अक्ष	$y=0, z=0$	(vi) Y-अक्ष समान्तर के	$x=h, z=q$
(iii) Y-अक्ष	$x=0, z=0$	(vii) Z-अक्ष समान्तर के	$x=h, y=p$
(iv) Z-अक्ष	$x=0, y=0$		

असममित रूप का सममित रूप में निरूपण

**(Reduction of Non-Symmetrical Form To Symmetrical Form) :**

माना रेखा का समीकरण असममित रूप में  $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ,  $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  है। सममित रूप में समीकरण ज्ञात करने के लिए हमें इसके दिक् अनुपात और इस पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात होने चाहिये।

- (i) **दिक् अनुपात** : माना  $l, m, n$  रेखा के दिक् अनुपात हैं। यहाँ रेखा दोनों समतलों में है, अतः इसे दोनों समतलों के अभिलम्बों के लम्बवत् होना चाहिए। अतः  $a_1l + b_1m + c_1n = 0$ ,  $a_2l + b_2m + c_2n = 0$ । इन समीकरणों से  $l, m, n$  के समानुपाती मान तिर्यक (cross) गुणन से निम्न प्रकार से प्राप्त किये जा सकते हैं।

$$\frac{l}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{m}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{n}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

विकल्पात्मक विधि :

सदिष  $\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = i(b_1c_2 - b_2c_1) + (c_1a_2 - c_2a_1) + k(a_1b_2 - a_2b_1)$ , दो समतलों की कटान रेखा के समान्तर

होगा अतः  $l : m : n = (b_1c_2 - b_2c_1) : (c_1a_2 - c_2a_1) : (a_1b_2 - a_2b_1)$

(ii) दी गई सरल रेखा पर किसी बिन्दु के निर्देशांक :  $l, m, n$  एक साथ शून्य नहीं हो सकते इसलिए कम से कम एक अशून्य होना चाहिए। माना  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ , तब रेखा  $xy$  समतल के समान्तर नहीं हो सकती है। अतः यह इसे काटेगी। माना यह  $xy$  समतल को  $(x_1, y_1, 0)$  पर काटती है। तब  $a_1x_2 + b_1y_1 + d_1 = 0$  और  $a_2x_1 + b_2y_1 + d_2 = 0$ । इन्हें हल करने पर हम रेखा पर एक बिन्दु प्राप्त करते हैं। सरल रेखा का समीकरण

$$\frac{x - x_1}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y - y_1}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{z - 0}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{या} \quad \frac{x - \frac{b_1d_2 - b_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1}}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y - \frac{d_1a_2 - d_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{z - 0}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{बन जाता है।}$$

नोट : यदि  $l \neq 0$ ,  $yz$  समतल पर एक बिन्दु  $(0, y_1, z_1)$  लो और यदि  $m \neq 0$ ,  $xz$  समतल पर एक बिन्दु  $(x_1, 0, z_1)$  लो।

विकल्पात्मक विधि :

यदि  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ , दोनों समीकरणों में  $z=0$  रखने पर मिलने वाली समीकरणों  $a_1x + b_1y + d_1 = 0$  और  $a_2x + b_2y + d_2 = 0$ , को हल कीजिए अथवा  $y=0$  रखने पर मिलने वाली समीकरणों  $a_1x + c_1z + d_1 = 0$  और  $a_2x + c_2z + d_2 = 0$ . को हल कीजिए।

**किसी बिन्दु से दी गई रेखा पर लम्ब का पाद, लम्बाई और समीकरण  
 (Foot, Length And Equation Of Perpendicular From A Point To A Line) :**

(i) कार्तीय रूप (Cartesian form): माना रेखा का समीकरण  $\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} = r$  (माना) .....(i)

और  $A(\alpha, \beta, \gamma)$  एक बिन्दु है।

रेखा (i) पर एक बिन्दु  $P(lr+a, mr+b, nr+c)$  है। .....(ii)

यदि यह  $A$  से रेखा पर लम्बपाद है, तो  $AP$  रेखा (i) के लम्बवत होगी।

अतः  $l(lr+a-\alpha) + m(mr+b-\beta) + n(nr+c-\gamma) = 0$  अर्थात्  $r = (\alpha-a)l + (\beta-b)m + (\gamma-c)n$  चूंकि

$l^2 + m^2 + n^2 = 1, r$  के इस मान को (ii) में रखने पर, हम बिन्दु  $A$  से दी गई रेखा पर लम्बपाद प्राप्त करते हैं। अब

जबकि लम्बपाद  $P$  ज्ञात है, लम्ब की लम्बाई  $AP = \sqrt{(lr+a-\alpha)^2 + (mr+b-\beta)^2 + (nr+c-\gamma)^2}$  द्वारा दी

जाती है। एवं लम्ब का समीकरण  $\frac{x-\alpha}{lr+a-\alpha} = \frac{y-\beta}{mr+b-\beta} = \frac{z-\gamma}{nr+c-\gamma}$  है।

(ii) सदिष रूप (Vector Form) : रेखा जो एक बिन्दु, जिसका स्थिति सदिष  $\vec{\alpha}$  है, से गुजरती है, और रेखाओं  $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$  तथा  $\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda\vec{b}_2$  के लम्बवत् है सदिष  $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2$  के समान्तर होती है। अतः ऐसी रेखा का सदिष समीकरण  $\vec{r} = \vec{\alpha} + \lambda(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)$  होता है। एक बिन्दु  $\vec{\alpha}$  का रेखा  $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$  में प्रतिबिम्ब का स्थिति सदिष

$$\vec{\beta} = 2\vec{a} - \left[ \frac{2(\vec{a} - \vec{\alpha}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right] \vec{b} - \vec{\alpha} \quad \text{होता है। रेखा पर लम्बपाद का स्थिति सदिष } \vec{f} = \vec{a} - \left[ \frac{(\vec{a} - \vec{\alpha}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right] \vec{b} \quad \text{होता है।}$$

Download FREE Study Package from [www.TekoClasses.com](http://www.TekoClasses.com) & Learn on Video  
[www.MathsBySuhag.com](http://www.MathsBySuhag.com) Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

$$\text{लम्ब का समीकरण } \vec{r} = \vec{\alpha} + \mu \left[ (\vec{a} - \vec{\alpha}) - \left( \frac{(\vec{a} - \vec{\alpha}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b} \right] \text{ है।}$$

---

किसी बिन्दु का प्रतिबिम्ब रेखा में ज्ञात करना (To find image of a point w. r. t a line) :

माना  $L \equiv \frac{x-x_2}{a} = \frac{y-y_2}{b} = \frac{z-z_2}{c}$  एक दी गई रेखा है।

माना  $(x', y', z')$ , बिन्दु  $P(x_1, y_1, z_1)$  का रेखा  $L$  में प्रतिबिम्ब है, तो

(i)  $a(x_1-x') + b(y_1-y') + c(z_1-z') = 0$

(ii) 
$$\frac{\frac{x_1+x'}{2} - x_2}{a} = \frac{\frac{y_1+y'}{2} - y_2}{b} = \frac{\frac{z_1-z'}{2} - z_2}{c} = \lambda$$

से हम  $x', y', z'$  का मान  $\lambda$  के पदों में निम्न प्रकार ज्ञात कीजिए है।

$$x' = 2a\lambda + 2x_2 - x_1, y' = 2b\lambda + 2y_2 - y_1,$$

$$z' = 2c\lambda + 2z_2 - z_1$$

अब  $x', y', z'$  का मान (i) में रख कर  $\lambda$  का मान ज्ञात कीजिए और  $\lambda$  का मान पुनः रख का  $(x' y' z')$  का मान ज्ञात कीजिए।

**एक समतल और रेखा के मध्य कोण (Angle Between A Plane And A Line) :**

(i) यदि रेखा  $\frac{x-x_1}{\ell} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$  और समतल  $ax+by+cz+d=0$  के बीच कोण  $\theta$  हो, तो

$$\sin\theta = \left[ \frac{a\ell + bm + cn}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}} \right]$$

(ii) सदिश रूप : यदि  $\theta$  रेखा  $\vec{r} = (\vec{a} + \lambda\vec{b})$  और  $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$  के मध्य कोण हो, तो  $\sin\theta = \left[ \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{b}| |\vec{n}|} \right]$

(iii) लम्बवत् होने का प्रतिबन्ध :  $\frac{\ell}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$  या  $\vec{b} \times \vec{n} = 0$

(iv) समान्तर होने का प्रतिबन्ध  $a\ell + bm + cn = 0$  या  $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$

**एक रेखा के समतल में होने का प्रतिबन्ध (Condition For A Line To Lie In A Plane) :**

(i) कार्तीय रूप (Cartesian form) : रेखा  $\frac{x-x_1}{\ell} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$  समतल  $ax+by+cz+d=0$  में होगी यदि  $ax_1+by_1+cz_1+d=0$  और  $a\ell+bm+cn=0$ .

(ii) सदिश रूप (Vector form) : रेखा  $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$  समतल  $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$  में होगी यदि  $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$  और  $\vec{a} \cdot \vec{n} = d$ .

**स्मतलीय रेखाएँ (Coplanar Lines) :**

(i) यदि दी गई रेखाएँ  $\frac{x-\alpha}{\ell} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$  और  $\frac{x-\alpha'}{\ell'} = \frac{y-\beta'}{m'} = \frac{z-\gamma'}{n'}$  है, तो दोनों रेखाओं के एक ही

समतल में होने का प्रतिबन्ध 
$$\begin{vmatrix} \alpha - \alpha' & \beta - \beta' & \gamma - \gamma' \\ \ell & m & n \\ \ell' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$$
 है और समतल का समीकरण

$$\begin{vmatrix} x - \alpha & y - \beta & z - \gamma \\ \ell & m & n \\ \ell' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$$
 है, जिसमें उपर दी गई रेखाएँ विद्यमान है।

(ii) समतलता का प्रतिबन्ध यदि दोनों रेखाएँ सामान्य रूप में हैं –

माना रेखाएँ  $ax+by+cz+d=0 = a'x+b'y+c'z+d'$  और  
 $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 = \alpha'x+\beta'y+\gamma'z+\delta'$  है।

ये सरल रेखाएँ समतलीय होंगी यदि 
$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 0$$

विकल्पात्मक विधि

न्यूनतम दूरी की रेखा के अनुदिश सदिश 
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}$$
 होगा।

अब इसकी दिशा में इकाई सदिश  $\hat{u} = li + mj + nk$  होगा।

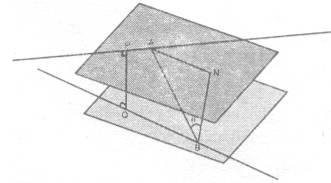
माना  $\vec{v} = (\alpha - \alpha')\hat{i} + (\beta - \beta')\hat{j} + (\gamma - \gamma')\hat{k}$

**S.D. = u.v**

**विषम रेखाएँ (Skew Lines) :**

(i) रेखाएँ जो समातन्तर नहीं हैं और असमतलीय हैं, अर्थात् आपस में कहीं, नहीं काटती, विषम रेखाएँ (skew lines)

कहलाती हैं। यदि 
$$\begin{vmatrix} \alpha'-\alpha & \beta'-\beta & \gamma'-\gamma \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} \neq 0$$
 हो, तो रेखाएँ विषम रेखाएँ (skew lines) होंगी।



(ii) न्यूनतम दूरी : माना कि रेखाओं की समीकरण 
$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} \text{ और } \frac{x-\alpha'}{l'} = \frac{y-\beta'}{m'} = \frac{z-\gamma'}{n'}$$
 हैं।

तो इनके मध्य न्यूनतम दूरी 
$$= \frac{(\alpha - \alpha')(mn' - m'n) + (\beta - \beta')(nl - n'l) + (\gamma - \gamma')(lm' - l'm)}{\sqrt{\sum (mn' - m'n)^2}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \alpha'-\alpha & \beta'-\beta & \gamma'-\gamma \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}}{\sqrt{\sum (mn' - m'n)^2}}$$

(ii) सदिश रूप : रेखाओं  $\vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$  और  $\vec{a}_2 + \lambda\vec{b}_2$  के विषम (skew) होने के लिए 
$$(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \neq 0 \quad \text{या} \quad [\vec{b}_1 \vec{b}_2 (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)] \neq 0$$

(iv) दो समातन्तर रेखाओं  $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}$  और  $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}$  के मध्य न्यूनतम दूरी 
$$d = \frac{|(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \times \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

**गोला (Sphere)**

गोला का समीकरण जो  $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$  से दिया जाता है का केन्द्र  $(-u, -v, -w)$  और त्रिज्या

Download FREE Study Package from [www.TekoClasses.com](http://www.TekoClasses.com) & Learn on Video  
[www.MathsBySuhag.com](http://www.MathsBySuhag.com) Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

$\sqrt{u^2 + v^2 + w^3 - d}$  होती है।

.....



## Exercise – 1

### 1-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. यदि किसी बिन्दु की तीनों निर्देशी अक्षों, से दूरियों के वर्गों का योग 36 है, तो इसकी मूल बिन्दु से दूरी है –  
 (A) 6 (B)  $3\sqrt{2}$  (C)  $2\sqrt{3}$  (D)  $6\sqrt{2}$
2. एक बिन्दु P इस प्रकार है कि  $PA^2 - PB^2 = 2K^2$  जहाँ A और B क्रमशः (3, 4, 5) और (-1, 3-7) है, तो बिन्दु P का बिन्दुपथ है –  
 (A)  $8x+2y+24z-9+2k^2=0$  (B)  $8x+2y+24z-2k^2=0$   
 (C)  $8x+2y+24z+9+2k^2=0$  (D) इनमें से कोई नहीं
3. एक रेखा निर्देशी अक्षों से  $\alpha, \beta, \gamma$  कोण बनाती है। यदि  $\alpha+\beta=90^\circ$  हो, तो  $\gamma=$   
 (A) 0 (B)  $90^\circ$  (C)  $180^\circ$  (D) इनमें से कोई नहीं
4. बिन्दुओं A, B, C, D के निर्देशांक (4,  $\alpha$ , 2), (5, -3, 2), ( $\beta$ , 1, 1) और (3, 3, -1) है। रेखा AB, रेखा CD के लम्बवत् होगी यदि –  
 (A)  $\alpha= -1, \beta= -1$  (B)  $\alpha= 1, \beta= 2$  (C)  $\alpha= 2, \beta= 1$  (D)  $\alpha= 2, \beta= 2$
5.  $xy+yz=0$  से प्रदर्शित होने वाला बिन्दुपथ है –  
 (A) लम्बवत् रेखाओं का युग्म (B) समान्तर रेखाओं का युग्म  
 (C) समान्तर समतलों का युग्म (D) लम्बवत् समतलों का युग्म
6. बिन्दु (2, -3, 1) से गुजरने वाले और बिन्दुओं (3, 4, -1) और (2, -1, 5) को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् समतल का समीकरण है –  
 (A)  $x+5y-6z+19=0$  (B)  $x-5y+6z-19=0$   
 (C)  $x+5y+6z+19=0$  (D)  $x-5y-6z-19=0$
7. समतलों  $x+2y+2z=5$  और  $3x+3y+2z=8$  के लम्बवत् और बिन्दु (1, -3, -2) से गुजरने वाले समतल का समीकरण है –  
 (A)  $2x-4y+3z-8=0$  (B)  $2x-4y-3z+8=0$   
 (C)  $2x+4y+3z+8=0$  (D) इनमें से कोई नहीं
8. एक चर समतल एक स्थित बिन्दु (1, 2, 3) से गुजरता है। मूल बिन्दु से इस समतल पर डाले गए लम्ब के पाद का बिन्दुपथ है –  
 (A)  $x^2+y^2+z^2-x-2y-3z=0$  (B)  $x^2+2y^2+3z^2-x-2y-3z=0$   
 (C)  $x^2+4y^2+9z^2+x+2y-3=0$  (D)  $x^2+y^2+z^2+x+2y+3z=0$
9. बिन्दु (2, -1, 3) का समतल  $3x-2y-z=9$  में प्रतिबिम्ब है –  
 (A)  $\left(\frac{26}{7}, \frac{15}{7}, \frac{17}{7}\right)$  (B)  $\left(\frac{26}{7}, \frac{-15}{7}, \frac{17}{7}\right)$  (C)  $\left(\frac{26}{7}, \frac{15}{7}, \frac{-17}{7}\right)$  (D)  $\left(\frac{26}{7}, \frac{17}{7}, \frac{-15}{7}\right)$
10. रेखाएँ  $x=ay+b, z=cy+d$  और  $x=a'y+b', z=c'y+d'$  परस्पर लम्बवत् हैं यदि –  
 (A)  $(a+a')(b+b')(c+c')$  (B)  $aa'+cc'+1=0$

- (C)  $aa'+bb'+cc'+1=0$  (D)  $(a+a')(b+b')(c+c')+1=0$
11. रेखाओं  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$  और  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1}$  के मध्य कोण के अर्द्धक की समीकरण है -  
 (A)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2}; z-3=0$  (B)  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$   
 (C)  $x-1=0; \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$  (D) इनमें से कोई नहीं
12. बिन्दु  $(-1, -5, -10)$  की रेखा  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{12}$  और समतल  $x-y+z=5$  के समान्तर नापी गई दूरी है -  
 (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13
13. बिन्दु  $(1, -2, 3)$  की समतल  $x-y+z=5$  से रेखा  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-6}$  के समान्तर नापी गई दूरी है -  
 (A) 1 (B) 6/7 (C) 7/6 (D) इनमें से कोई नहीं
14. रेखाएँ  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$  और  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-2}$  हैं -  
 (A) समान्तर (B)  $60^\circ$  पर प्रतिच्छेद करती हैं।  
 (C) विषममतीय (D)  $90^\circ$  पर प्रतिच्छेद करती हैं।
15. यदि एक समतल निर्देशी अक्षों पर  $OA=a, OB=b, OC=c$  अन्तः खण्ड काटता है, तो  $\Delta ABC$  का क्षेत्रफल =  
 (A)  $\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$  (B)  $\frac{1}{2}(bc + ca + ab)$   
 (C)  $\frac{1}{2}abc$  (D)  $\frac{1}{2}\sqrt{(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2}$
16. समतल  $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 3\sqrt{3}$  द्वारा गोले  $|\vec{r}| = 5$  पर काटे गये वृत्तीय भाग की त्रिज्या है :  
 (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) इनमें से कोई नहीं

-----  
 एक से अधिक विकल्प सही

17. रेखा  $\frac{x-x_2}{d_1} = \frac{y-y_2}{d_2} = \frac{z-z_2}{d_3}$  को समाहित करने वाले बिन्दु  $A(x_1, y_1, z_1)$  से गुजरने वाले समतल का समीकरण है -  
 (A)  $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$  (B)  $\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$

$$(C) \begin{vmatrix} x-d_1 & y-d_2 & z-d_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(D) \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

18. रेखा  $x+y+z-1=0$ ,  $4x+y-2z+2=0$  का सममित रूप में समीकरण है -

$$(A) \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-0}{1}$$

$$(B) \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}$$

$$(C) \frac{x+1/2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1/2}{1}$$

$$(D) \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

19. सदिष  $2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$  के द्वारा समतल, जिसमें सदिष  $2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$  और  $\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$  है, के साथ बनाया गया न्यूनकोण है -

$$(A) \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$(B) \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$(C) \tan^{-1}(\sqrt{2})$$

$$(D) \cot^{-1}(\sqrt{2})$$

20. वह अनुपात जिसमें गोला  $x^2+y^2+z^2=504$  बिन्दुओं  $(12, -4, 8)$  और  $(27, -9, 18)$  को मिलाने वाली रेखा को विभाजित करता है, तो -

(A) 2 : 3 अन्तः विभाजन

(B) 3 : 4 अन्तः विभाजन

(C) 2 : 3 बाह्यः विभाजन

(D) 3 : 4 बाह्यः विभाजन

1-B (विषयात्मक प्रश्न)

- प्रदर्शित कीजिए कि बिन्दु  $(0, 7, 10)$ ,  $(-1, 6, 6)$  और  $(-4, 9, 6)$  एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज बनाते हैं।
- सिद्ध कीजिए कि शीर्षों  $(0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)$  वाला चतुष्फलक एक सम चतुष्फलक है। इसका केन्द्रक भी ज्ञात कीजिए।
- बिन्दु  $(a,0,0), (0,b,0), (0,0,c)$  और  $(0,0,0)$  से समान दूरी पर स्थित बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
- उस अनुपात को ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दु  $(3,5,-7)$  और  $(-2,1,8)$  को जोड़ने वाली रेखा  $yz$ -समतल द्वारा काटी जाती है। साथ ही समतल तथा रेखा का प्रतिच्छेद बिन्दु भी ज्ञात कीजिए।
- बिन्दुओं  $P(6,-7,-1)$  तथा  $Q(2,-3,1)$  से गुजरने वाली रेखा की दिक्कोज्याएँ ज्ञात कीजिए, जिसकी दिशा इस प्रकार है कि यह  $x$ -अक्ष की धनात्मक दिशा से न्यूनकोण  $\alpha$  बनाती है।
- उन रेखाओं के मध्य कोण ज्ञात कीजिए जिनकी दिक्कोज्याएँ निम्न सम्बन्ध से दी जाती हैं,  $l+m+n=0$  तथा  $l^2+m^2=n^2$ ।
- सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं  $A(-9,4,5)$  और  $B(11,0,-1)$  को मिलाने वाली रेखा पर मूलबिन्दु से डाले गये लम्ब का पाद  $AB$  का मध्य बिन्दु है।
- $P$  तथा  $Q$  बिन्दु  $(-1,2,1)$  तथा  $(4,3,5)$  हैं।  $PQ$  का प्रेक्षक उस सरल रेखा पर ज्ञात कीजिए जो  $y$  तथा  $z$  अक्ष से क्रमशः  $120^\circ$  तथा  $135^\circ$  का कोण बनाती है तथा  $x$ -अक्ष से न्यूनकोण बनाती है।
- (i) यदि एक समतल के लम्बवत् इकाई सदिष  $\hat{n}$  है और मूलबिन्दु से समतल पर डाले गये लम्ब की लम्बाई  $p$  है, तो समतल की सदिष समीकरण ज्ञात कीजिए।

- (ii) समतलों  $\vec{r} \cdot \vec{a} = p$  और  $\vec{r} \cdot \vec{b} = q$  की प्रतिच्छेन रेखा और मूलबिन्दु को समाहित करने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।
10. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं  $(1,0,0)$  और  $(0,1,0)$  से गुजरता है और समतल  $x+y-3=0$  के साथ  $0.25\pi$  रेडियन का कोण बनाता है।
11. बिन्दुओं  $(1,1,1), (1,-1,1), (-7,-3,-5)$  से गुजरने वाले समतल और  $x-z$  समतल के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।
12. एक रेखा का सदिश समीकरण  $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$  है, तो इसका कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए।
13. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसमें समान्त रेखाएँ  $(x-4) = \frac{3-y}{4} = \frac{z-2}{5}$  और  $(x-3) = \lambda(y+2) = \mu z$  निहित है।
14. रेखा  $\frac{x-1}{9} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-3}$  के समतल  $3x-3y+10z=26$  में प्रतिबिम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए।
15. निम्नलिखित रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के मध्य दूरी ज्ञात कीजिए—  
 (i) रेखाओं  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$  &  $\frac{x-4}{5} = \frac{y-1}{2} = z$   
 (ii) रेखाओं  $\vec{r} = (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + \lambda(3\hat{i} - \hat{j})$  &  $\vec{r} = (4\hat{i} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{k})$
16. रेखा  $(2,-1,4)$  और  $(-2,2,-2)$  को व्यास मानकर खींचे गए गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए तथा उस वृत्त का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए जो गोले पर समतल  $2x+y-z=3$  द्वारा काटा जाता है।

## Exercise – 2

### 2-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. एक समतल निर्देशी अक्षों को A,B,C पर मिलता है और  $(\alpha, \beta, \gamma), \Delta ABC$  का केन्द्रक है, तो समतल का समीकरण है –  
 (A)  $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 3$       (B)  $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$       (C)  $\frac{3x}{\alpha} + \frac{3y}{\beta} + \frac{3z}{\gamma} = 1$       (D)  $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$
2. एक बिन्दु इस प्रकार गति करता है कि एक घन के छः पृष्ठों  $x=\pm 1, y=\pm 1, z=\pm 1$  की इस बिन्दु से दूरियों के वर्गों का योग 10 इकाई है। इस बिन्दु का बिन्दुपथ है –  
 (A)  $x^2+y^2+z^2=1$       (B)  $x^2+y^2+z^2=2$       (C)  $x+y+z=1$       (D)  $x+y+z=2$
3. एक चर समतल एक स्थिर बिन्दु  $(a,b,c)$  से गुजरता है और निर्देशी अक्षों को A,B,C पर मिलता है। A,B,C से गुजरने वाले और निर्देशी समतलों के समान्तर समतलों में उभयनिष्ठ बिन्दु का बिन्दुपथ है –  
 (A)  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$       (B)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$       (C)  $ax+by+cz=1$       (D) इनमें से कोई नहीं
4. दो आयकाताकर अक्षों के निकाय का मूल बिन्दु समान है। यदि एक समतल उन्हें मूल बिन्दु से  $a,b,c$  और  $a_1,b_1,c_1$  दूरी पर

काटता है, तो -

(A)  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{c_1^2}$

(B)  $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{c_1^2}$

(C)  $a^2 + b^2 + c^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$

(D)  $a^2 - b^2 + c^2 = a_1^2 - b_1^2 + c_1^2$

5. रेखाओं  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$  और  $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$  के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरने वाले और बिन्दु (0,0,0) से अधिकतम दूरी पर स्थित समतल का समीकरण है -

(A)  $4x+3y+5z=25$

(B)  $4x+3y+5z=50$

(C)  $3x+4y+5z=49$

(D)  $x+7y-5z=2$

6. समतल  $2x-y+z=6$  और समतलों  $x+y+2z=7$  और  $x-y=3$  के लम्बवत् एक समतल के मध्य कोण है -

(A)  $\frac{\pi}{4}$

(B)  $\frac{\pi}{3}$

(C)  $\frac{\pi}{6}$

(D)  $\frac{\pi}{2}$

7. 'a' का अशून्य मान जिसके लिए रेखाएँ  $2x-y+3z+4=0=ax+y-z+2$  और  $x-3y+z=0=x+2y+z+1$  समतलीय हैं।

(A) -2

(B) 4

(C) 6

(D) 0

8. यदि रेखाएँ  $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ ,  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{4}$  और  $\frac{x+k}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{h}$  संगामी हों, तो -

(A)  $h = -2, k = -6$

(B)  $h = \frac{1}{2}, k = 2$

(C)  $h = 6, k = 2$

(D)  $h = 2, k = \frac{1}{2}$

9. निम्न में से कौनसा समतल, समतलों  $x-y+2z=3$  और  $4x+3y-z=1$  को समान रेखा के अनुदिश काटता है -

(A)  $11x+10y-5z=0$

(B)  $7x+7y-4z=0$

(C)  $5x+2y+z=2$

(D) इनमें से कोई नहीं

10. समतलीय बिन्दु A, B, C, D क्रमशः (2, -x, 2, 2), (2, 2, -y, 2), (2, 2, 2, -z) और (1, 1, 1) हैं, तो -

(A)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

(B)  $x+y+z=1$

(C)  $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z} = 1$

(D) इनमें से कोई नहीं

11. बिन्दुओं (1,0,0), (0,1,0) से गुजरने वाले और समतल  $x+y=3$  के साथ  $\pi/4$  कोण बनाते वाले समतल अभिलम्ब के दिक्अनुपात हैं -

(A)  $(1, \sqrt{2}, 1)$

(B)  $(1, 1, \sqrt{2})$

(C)  $(1, 1, 2)$

(D)  $(\sqrt{2}, 1, 1)$

12. माना कि बिन्दु A(a,b,c) और B(a',b',c'), मूल बिन्दु से r और r' की दूरी पर स्थित हैं। रेखा AB मूल बिन्दु से गुजरती है, तो

(A)  $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$

(B)  $aa'+bb'+cc'=rr'$

(C)  $aa'+bb'+cc'=r^2+r'^2$

(D) इनमें से कोई नहीं

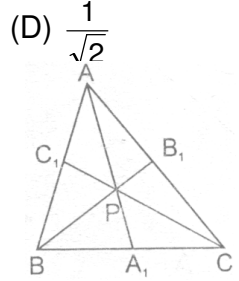
13. पिरामिड AOBC का आधार एक समबाहु त्रिभुज OBC है, जिसकी प्रत्येक भुजा  $4\sqrt{2}$  के बराबर है। 'O' मूल बिन्दु है, AO,  $\Delta OBC$  के समतल के लम्बवत् है और  $|\vec{AO}| = 2$  हो, तो उन विषमतलीय सरल रेखाओं के मध्य कोण की कोज्या जिनमें से एक, बिन्दु A और OB के मध्य बिन्दु से गुजरती है और दूसरी O और BC के मध्य बिन्दु से गुजरती है, का मान होगा –

- (A)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  (B) 0 (C)  $\frac{1}{\sqrt{6}}$  (D)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

14.  $\Delta ABC$  के अन्दर एक स्वेच्छ बिन्दु P इस प्रकार है कि रेखाएँ  $AA_1$ ,  $BB_1$  और  $CC_1$  बिन्दु

P पर संगामी है। तो  $\frac{PA_1}{AA_1} + \frac{PB_1}{BB_1} + \frac{PC_1}{CC_1}$  का मान सदैव होगा –

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) इनमें से कोई नहीं



एक से अधिक विकल्प सही

15. मूलबिन्दु से गुजरने वाले और रेखा  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+1}{-2}$  के समान्तर एवं इससे  $\frac{5}{3}$  की दूरी पर स्थित समतलों के समीकरण है –

- (A)  $2x+2y+z=0$  (B)  $x+2y+2z=0$  (C)  $2x-2y+z=0$  (D)  $x-2y+2z=0$

16. यदि एक आयताकार समान्तर षट्फलक के किनारे 3, 2, 1 हैं, तो विकर्णों के एक युग्म के मध्य कोण है –

- (A)  $\cos^{-1} \frac{6}{7}$  (B)  $\cos^{-1} \frac{3}{7}$  (C)  $\cos^{-1} \frac{2}{7}$  (D) इनमें से कोई नहीं

17. दो रेखाएँ  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$  और  $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$  हैं। उस रेखा का समीकरण जो

- (A) दी गई रेखाओं के मध्य कोण को समद्विभाजित करती है,  $\frac{x}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z}{8}$  है।  
 (B) दी गई रेखाओं के मध्य कोण को समद्विभाजित करती है,  $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$  है।  
 (C) मूल बिन्दु से गुजरती है और दी गई रेखाओं के लम्बवत् है,  $x=y=-z$  है।  
 (D) इनमें से कोई नहीं

18. रेखाओं की दिक् कोज्याएँ जो  $l_1, m_1, n_1$  और  $l_2, m_2, n_2$  दिक्कोज्याओं वाली रेखाओं के मध्य कोण को समद्विभाजित करती हैं जबकि इन रेखाओं के मध्य कोण  $\theta$  हैं, होगी –

- (A)  $\frac{l_1+l_2}{\cos \frac{\theta}{2}}, \frac{m_1+m_2}{\cos \frac{\theta}{2}}, \frac{n_1+n_2}{\cos \frac{\theta}{2}}$  (B)  $\frac{l_1+l_2}{2\cos \frac{\theta}{2}}, \frac{m_1+m_2}{2\cos \frac{\theta}{2}}, \frac{n_1+n_2}{2\cos \frac{\theta}{2}}$   
 (C)  $\frac{l_1+l_2}{\sin \frac{\theta}{2}}, \frac{m_1+m_2}{\sin \frac{\theta}{2}}, \frac{n_1+n_2}{\sin \frac{\theta}{2}}$  (D)  $\frac{l_1+l_2}{2\sin \frac{\theta}{2}}, \frac{m_1+m_2}{2\sin \frac{\theta}{2}}, \frac{n_1+n_2}{2\sin \frac{\theta}{2}}$

19. रेखा AB का समीकरण  $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{6}$  है। एक बिन्दु P(1, 2, 5) से, रेखा PN खींची जाती है जो AB के लम्बवत् है और रेखा PQ समतल  $3x+4y+5z=0$  के समान्तर खींची जाती है जो AB को Q पर मिलती है, तो

- (A) N के निर्देशांक  $\left(\frac{52}{49}, -\frac{78}{49}, \frac{156}{49}\right)$  हैं।  
 (B) Q के निर्देशांक  $\left(3, -\frac{9}{2}, 9\right)$  हैं।  
 (C) PN का समीकरण  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-176} = \frac{z-5}{-89}$  हैं।  
 (D) PQ का समीकरण  $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-13} = \frac{z-5}{8}$  हैं।

20. समतल  $2x-3y-7z=0$ ,  $3x-14y-13z=0$  और  $8x-31y-33z=0$   
 (A) मूल बिन्दु से गुजरते हैं। (B) एक उभयनिष्ठ रेखा पर काटते हैं।  
 (C) एक त्रिकोणीय प्रिज्म बनाते हैं। (D) इनमें से कोई नहीं

2-B (विषयात्मक प्रश्न)

- समतलों  $2x+3y-z+1=0$  और  $x+y-2z+3=0$  के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से गुजरने वाला और समतल  $3x-y-2z=4$  के लम्बवत् समतल  $\pi$  ज्ञात कीजिए। बिन्दु  $(1, 1, 1)$  का समतल  $\pi$  में प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए।
- सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु  $(2, -1, -1)$  से गुजरती है, समतल  $4x+y+z+2=0$  के समान्तर है और समतलों  $2x+y=0$  और  $x-y+z$  की प्रतिच्छेदन रेखा के लम्बवत् है।
- यदि बिन्दु  $(\alpha, 5\alpha, 10\alpha)$  की रेखा  $\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k})$  और समतल  $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$  के प्रतिच्छेद बिन्दु से दूरी 13 इकाई है, तो  $\alpha$  के सभी संभव मान ज्ञात कीजिए।
- सिद्ध कीजिए कि सरल रेखाएँ जिनकी दिक्कोज्याएँ सम्बन्धों  $p\ell + qm + rn = 0$  और  $a\ell^2 + bm^2 + cn^2 = 0$  द्वारा दी जाती है, परस्पर लम्बवत् होगी यदि  $p^2(b+c) + q^2(c+a) + r^2(a+b) = 0$  और समान्तर होगी, यदि  $\frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} + \frac{r^2}{c} = 0$
- एक आयताकार समान्तरषट्क के किनारे  $a, b, c$  हैं, प्रदर्शित कीजिए कि चारों विकर्णों के मध्य कोण  $\cos^{-1} \frac{a^2 \pm b^2 \pm c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$  है।
- मूलबिन्दु से गुजरने वाली दो सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा  $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$  को  $\pi/3$  कोण पर काटती है।
- रेखा  $3x-y+2z-1=0$ ,  $x+2y-z-2=0$  का समतल  $3x+2y+z=0$  पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।
- एक रेखा  $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-k}{3}$ ,  $y-z$  समतल तथा  $x-y$  समतल को क्रमशः बिन्दु A तथा B पर काटती है यदि  $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ , हो तो k का मान ज्ञात कीजिए जहाँ O मूल बिन्दु है।

9. मानाकि P(1, 3, 5) तथा Q(-2, 1, 4) दो ऐसे बिन्दु हैं जिनसे x-z समतल पर लम्ब PM तथा QN डाले जाते हैं वह कोण ज्ञात कीजिए जो रेखा MN समतल  $x+y+z=5$  के साथ बनाती है।
10. यदि रेखाओं  $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ;  $x=0$  और  $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 1$ ;  $y=0$  के मध्य न्यूनतम दूरी  $2d$  हो, तो सिद्ध कीजिए कि
- $$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} .$$
11. सिद्ध कीजिए कि रेखा  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{1}$  समतल  $3x+4y+6z+7=0$  में स्थित हैं यदि समतल रेखा के अनुदिश तब तक घूर्णन करता है जब तक कि मूल बिन्दु से न गुजरे तो नई स्थिति में समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।
12. एक रेखा  $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-k}{3}$ , y-z समतल तथा x-y समतल को क्रमशः बिन्दु A तथा B पर काटती है यदि  $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ , हो तो k का मान ज्ञात कीजिए जहाँ O मूल बिन्दु है।
13. उस चतुष्फलक का आयतन ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष P(2, 3, 2), Q(1, 1, 1), R(3, -2, 1) और S(7, 1, 4) है।
14. एक गोले का समीकरण  $|\vec{r} - \vec{a}|^2 + |\vec{r} - \vec{b}|^2 = 72$  है, जहाँ  $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$  और  $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ , तो ज्ञात कीजिए -
- गोले का केन्द्र
  - गोले की त्रिज्या
  - गोले के केन्द्र की समतल  $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) = -3$  से लम्बवत् दूरी
15. गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतल  $x-2y-2z=7$  को बिन्दु (3, -1, -1) पर स्पर्श करता है और बिन्दु (1, 1, -3) से गुजरता है।

## Exercise – 3

### 3-A (स्तम्भ मिलान)

- | 1. स्तम्भ-I  | स्तम्भ-II |
|--|-----------|
| (A) समतल XOZ बिन्दु (1, -1, 5) तथा (2, 3, 4) को मिलाने वाली रेखा को $\lambda:1$ के अनुपात में विभाजित करता है, तब $\lambda$ है | (p) 7     |
| (B) समतल $x+3y-4z+6=0$ द्वारा अक्षों पर बनाये गये अन्तःखण्डों का योग है  | (q) 0     |



- (C) दोनों समतलों के मध्य स्थित कोण का cosine होगा  $3x-4y+5z=0$   
 तथा  $2x-y-2z=5$  is

(r)  $\frac{1}{3}$

- (D) बिन्दु  $P(3, 8, 2)$  की रेखा  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3}$  से दूरी होगी  
 जो कि समतल  $3x+2y-2z+17=0$  के समान्तर अनुदिश है।

(s)  $-\frac{13}{2}$

2. स्तम्भ-I

स्तम्भ-II

- (A) बिन्दु  $(1, 3, 4)$  की समतल  $2x-y+z=3$  के दूरी जो कि रेखा  
 $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$  के समान्तर मापी जाती है, होगी

(p) 0

- (B) रेखाओं  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$  तथा  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{5}$   
 के बीच की न्यूनतम दूरी है

(q)  $\frac{1}{\sqrt{6}}$

- (C) बिन्दु  $(0, -1, -1), (4, 5, 1), (3, 9, 4)$  तथा  $(-4, 4, k)$   
 समतलीय है तब  $k=$

(r) 4

- (D) समतल  $2x-3y+4z-12=0$  तथा निर्देशांक समतलों के मध्य स्थित  
 चतुष्फलक का आयतन है

(s) 12

3-B (कथन/कारण)

3. कथन-1 : यदि एक अर्द्ध किरण धनात्मक अक्षों के साथ  $\alpha, \beta, \gamma$  कोण बनाती है तब  $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$

कथन-2 : यदि  $l, m, n$  एक रेखा की द्विकोज्जाये है तब  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$  होगा।

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है और कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।  
 (B) कथन-1 सत्य है। कथन-2 सत्य है और कथन-2 कथन-1 के लिए सही स्पष्टीकरण नहीं है।  
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है  
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है

4. कथन-1 : लम्बवत् समतलों का बिन्दुपथ  $xy+yz=0$  द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

कथन-2 : यदि  $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$  तथा  $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$  लम्बवत् है तब  $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=1$  होगा।

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है और कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।  
 (B) कथन-1 सत्य है। कथन-2 सत्य है और कथन-2 कथन-1 के लिए सही स्पष्टीकरण नहीं है।  
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है  
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है

5. कथन-1 : समीकरण  $2x^2-6y^2+4z^2+18yz+2zx+xy=0$  लम्बवत् समतलों के युग्म को प्रदर्शित करती है।

कथन-2 : समतल युग्म जो कि  $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$  द्वारा प्रदर्शित किया जाता है, लम्बवत् है यदि  $a+b+c=0$  होगा।

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है और कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।  
 (B) कथन-1 सत्य है। कथन-2 सत्य है और कथन-2 कथन-1 के लिए सही स्पष्टीकरण नहीं है।  
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है  
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है

6. कथन-1 : विषम रेखायें  $\frac{x+3}{-4} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{2}$  तथा  $\frac{x+2}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z-7}{1}$  के बीच की न्यूनतम दूरी 9 है।

कथन-2 : दो रेखायें विषम रेखायें होंगी यदि उन रेखाओं से कोई भी समतल नहीं गुजरता हो।

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है और कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।  
 (B) कथन-1 सत्य है। कथन-2 सत्य है और कथन-2 कथन-1 के लिए सही स्पष्टीकरण नहीं है।  
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है  
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है

### 3-C (अनुच्छेद)

#### 7. अनुच्छेद

माना रेखायें  $L_1$  तथा  $L_2$  जिसके समीकरण क्रमशः  $\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1}$  तथा  $\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$  है। A तथा B

दो  $L_1$  और  $L_2$  पर इस प्रकार स्थित है कि AB दोनों रेखाओं  $L_1$  तथा  $L_2$  के लम्बवत् है।

7.1 रेखाओं  $L_1$  तथा  $L_2$  के बीच न्यूनतम दूरी है -

- (A)  $\sqrt{30}$  (B)  $2\sqrt{30}$  (C)  $3\sqrt{30}$  (D) इनमें से कोई नहीं

7.2 बिन्दु A के निर्देशांक है -

- (A) (1, 8, 2) (B) (3, 8, 3) (C) (-3, 8, 3) (D) इनमें से कोई नहीं

7.3 बिन्दु B के निर्देशांक है -

- (A) (-3, -7, 6) (B) (2, 7, 6) (C) (1, 6, 3) (D) इनमें से कोई नहीं

#### 8. अनुच्छेद

माना कि  $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$  तथा  $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$  दो समतल है जहाँ  $d_1, d_2 > 0$  तथा मूल बिन्दु न्यूनकोण में स्थित होगा यदि  $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 < 0$  तथा मूल बिन्दु अधिक कोण में स्थित होगा यदि  $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 > 0$  आगे बिन्दु  $(x_1, y_1, z_1)$  तथा मूल बिन्दु दोनों, या तो न्यूनकोण में या अधिककोण में होंगे यदि बिन्दु  $(x_1, y_1, z_1)$  तथा मूल बिन्दु में से कोई एक न्यूनकोण में तथा दूसरा अधिक कोण में होगा, यदि  $(a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1) (a_2x_1+b_2y_1+c_2z_1+d_2) < 0$

8.1 दिये गये समतल  $2x+3y-4z+7=0$  तथा  $x-2y+3z-5=0$  यदि बिन्दु  $P(1, -2, 3)$  है, तब

- (A) O तथा P दोनों समतलों के मध्य न्यूनकोण में स्थित है  
 (B) O तथा P दोनों अधिक कोण में स्थित है।  
 (C) O न्यूनकोण में तथा P अधिक कोण में स्थित है  
 (D) O अधिक कोण तथा P न्यूनकोण में स्थित है

8.2 समतल  $x+2y-3z+5=0$  तथा  $2x+y+3z+1=0$  दिये है यदि एक बिन्दु  $P(2, -1, 2)$  तब

- (A) O तथा P समतलों के मध्य न्यूनकोण में स्थित है  
 (B) O तथा P अधिक कोण में स्थित है  
 (C) O न्यूनकोण में तथा P अधिक कोण में स्थित है  
 (D) O अधिक कोण तथा P न्यूनकोण में स्थित है

- 8.3 समतल  $x+2y-3z+2=0$  तथा  $x-2y+3z+7=0$  दिये है यदि बिन्दु  $P(1, 2, 2)$  तब  
 (A)  $O$  तथा  $P$  समतलों के मध्य न्यूनकोण में स्थित है  
 (B)  $O$  तथा  $P$  अधिक कोण में स्थित है  
 (C)  $O$  न्यूनकोण में तथा  $P$  अधिक कोण में स्थित है  
 (D)  $O$  अधिक कोण तथा  $P$  न्यूनकोण में स्थित है

3-D (सत्य/असत्य कथन)

9. तीन रेखाओं जिसके दिक्अनुपात  $1, 1, 2$ ;  $\sqrt{3}-1, -\sqrt{3}-1, 4$  तथा  $-\sqrt{3}-1, \sqrt{3}-1, 4$  है, एक समबाहु त्रिभुज बनाते हैं
10. समतल हो कि बिन्दुओं  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, -7, 1)$  तथा  $(-7, -3, -5)$  से गुजरता है,  $x$ -समतल के लम्बवत् है
11. एक रेखाखण्ड के निर्देशी अक्षों पर प्रक्षेप मापांक में  $12, 4, 3$  है, तो उस रेखाखण्ड की लम्बाई  $19$  है।
12. बिन्दु  $(a, b, c)$  से रेखा  $x=y=z$  पर डाले गये लम्ब का पाद बिन्दु  $(r, r, r)$  है जहाँ  $3r=a+b+c$ .
13. एक घन के किसी शीर्ष बिन्दु की उस विकर्ण से दूरी जो उस शीर्ष से नहीं गुजरता है,  $\sqrt{2}a$  है जहाँ  $a$  घन की भुजा है।

3-E (रिक्त स्थान की पूर्ति)

14. एक घन के दो विकर्ण के मध्य cosine कोण है .....
15. बिन्दु का बिन्दुपथ होगा जिसकी समतलों  $x+y+z=0$ ,  $x-z=0$  तथा  $x-2y+z=0$  से दूरी  $2y+z=0$  के वर्गों का योग  $9$  है
16. रेखाएँ  $\frac{x+4}{3} = \frac{y+6}{5} = \frac{z-1}{-2}$  तथा  $3x-2y+z+5=0=2x+3y+4z-k$  समतलीय है तब  $k$  बराबर है .....
17. यदि बिन्दु  $P(4, 3, 5)$  की  $y$ -अक्ष से दूरी  $\lambda$  इकाई है, य तब  $5\lambda^2$  का मान होना चाहिए
18. यदि समतलों  $y+z=0$ ,  $z+x=0$ ,  $x+y=0$  तथा  $x+y+z=1$  द्वारा बनाये गये चतुष्फलक का आयतन  $t$  इकाई घन है तो  $729t$  का मान होगा

## Exercise – 4

4-A (पूर्ववर्ती JEE परीक्षा प्रश्न)

**IIT-JEE-2008**

1. तीन समतल लीजिए  
 $P_1 : x-y+z=1$   
 $P_2 : x+y-z=-1$   
 $P_3 : x-3y+3z=2$   
 माना समतल  $P_2$  व  $P_3$ ,  $P_3$  व  $P_1$  तथा  $P_1$  व  $P_2$  की प्रतिच्छेद रेखाएँ क्रमशः  $L_1, L_2, L_3$  हैं।

कथन-1 :  $L_1, L_2$ , और  $L_3$  में से कम से कम दो रेखाएँ असमान्तर (non-parallel) हैं।

और

कथन-2 : तीनों समतलों का कोई सर्वनिष्ठ बिन्दु (common point) नहीं है।

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है और कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।  
 (B) कथन-1 सत्य है। कथन-2 सत्य है और कथन-2 कथन-1 के लिए सही स्पष्टीकरण नहीं है।  
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है  
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है

2.

अनुच्छेद

निम्न रेखाएँ लीजिए

$$L_1 : \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{2}$$

$$L_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

- 2.1 दोनों रेखाओं  $L_1$  और  $L_2$  के लम्बवत् इकाई सदिष निम्न है  
 (A)  $\frac{-\hat{i} + 7\hat{j} + 7\hat{k}}{\sqrt{99}}$  (B)  $\frac{-\hat{i} - 7\hat{j} + 5\hat{k}}{5\sqrt{3}}$  (C)  $\frac{-\hat{i} + 7\hat{j} + 5\hat{k}}{5\sqrt{3}}$  (D)  $\frac{7\hat{i} - 7\hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{99}}$
- 2.2 रेखाओं  $L_1$  और  $L_2$  के बीच की न्यूनतम दूरी निम्न है  
 (A) 0 (B)  $\frac{17}{\sqrt{3}}$  (C)  $\frac{41}{5\sqrt{3}}$  (D)  $\frac{17}{5\sqrt{3}}$
- 2.3 बिन्दु  $(-1, -2, -1)$  से होकर जाने वाले तथा दोनों रेखाओं  $L_1$  व  $L_2$  के लम्बवत् अभिलम्ब वाले समतल की बिन्दु  $(1, 1, 1)$  की दूरी निम्न है  
 (A)  $\frac{2}{\sqrt{75}}$  (B)  $\frac{7}{\sqrt{75}}$  (C)  $\frac{13}{\sqrt{75}}$  (D)  $\frac{23}{\sqrt{75}}$

### IIT-JEE-2007

3. मानाकि समतल  $3x-6y-2z=15$  और  $2x+y-2z=5$  है।  
 कथन-1 दिये गये समतलों की प्रतिच्छेद रेखा के प्राचलिक समीकरण  $x=3+14t, y=1+2t, z=15t$  हैं।  
 कथन-2 : सदिष  $14\hat{i} + 2\hat{j} + 15\hat{k}$  दिए गए समतलों की प्रतिच्छेद रेखा के समान्तर है।  
 (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है और कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।  
 (B) कथन-1 सत्य है। कथन-2 सत्य है और कथन-2 कथन-1 के लिए सही स्पष्टीकरण नहीं है।  
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है  
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है
4. मानाकि रैखिक समीकरणों  
 $ax+by+cz=0$

$$bx+cy+az=0$$

$$cx+ay+bz=0$$

स्तम्भ-I

स्तम्भ-II

- (A)  $a+b+c \neq 0$  और  
 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$   
 (B)  $a+b+c=0$  और  
 $a^2 + b^2 + c^2 \neq ab + bc + ca$   
 (C)  $a+b+c \neq 0$  और  
 $a^2 + b^2 + c^2 \neq ab + bc + ca$   
 (D)  $a+b+c=0$  और  
 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

- (p) समीकरणों समतलों को प्रदर्शित करती है जो एक बिन्दु पर मिलते हैं।  
 (q) समीकरणों रेखा  $x=y=z$  को प्रदर्शित करती है।  
 (r) समीकरणों सर्वसम समतलों को प्रदर्शित करती है।  
 (s) समीकरणों सम्पूर्ण त्रिविम समष्टि को प्रदर्शित करती हैं।

**IIT-JEE-2006**

5. स्तम्भ मिलान कीजिए –

स्तम्भ-I

स्तम्भ-II

- (a) प्रथम चतुर्थांश में दो किरणें  $x + y = |a|$  और  
 $ax - y = 1$  एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती है। यदि  $a \in (a_0, \infty)$   
 हो, तो  $a_0$  का मान है –

(P) 2

- (b) बिन्दु  $(\alpha, \beta, \gamma)$  समतल  $x+y+z=2$  पर है, माना  
 $\vec{a} = \alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k}, \hat{k} \times (\hat{k} \times \vec{a}) = 0$ ,  
 तो  $\gamma =$

(Q) 4/3

- (c)  $\left| \int_0^1 (1-y^2)dy \right| + \left| \int_0^1 (y^2-1)dy \right|$  का मान है –

(R)  $\left| \int_0^1 \sqrt{1-x} dx \right| + \left| \int_{-1}^0 \sqrt{1+x} dx \right|$

- (d) यदि  $\sin A \sin B \sin C + \cos A \cos B = 1$  हो, तो

(S) 1

6. स्तम्भ मिलान कीजिए –

स्तम्भ -I

स्तम्भ -II

- (a)  $\sum_{i=1}^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{1}{2i^2}\right) = t$  हो, तो  $\tan t =$

(P)  $2\sqrt{2}$

- (b) त्रिभुज ABC की भुजाएँ a, b, c समान्तर श्रेणी में है  
 और  $\cos \theta_1 = \frac{a}{b+c}, \cos \theta_2 = \frac{b}{a+c}, \cos \theta_3 = \frac{c}{a+b}$ ,  
 तो  $\tan^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{\theta_3}{2}\right) =$

(Q) 1

- (d) एक रेखा  $x+2y+2z=0$  के लम्बवत् है  $(0, 1, 0)$   
 से गुजरती है। रेखा की मूलबिन्दु से लम्बवत् दूरी है –

(R)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$

- (d) एक समतल  $(1, -2, 1)$  से गुजरता है और समतलों  $2x-2y+z=0$  और  $x-y+2z=4$  के लम्बवत् है, समतल की बिन्दु  $(1, 2, 2)$  से दूरी है – (S)  $2/3$

**IIT-JEE-2005**

7. एक चर समतल जिसकी मूलबिन्दु से दूरी 1 इकाई है, निर्देशी अक्षों को A, B तथा C पर काटता है। यदि त्रिभुज ABC का केन्द्रक  $D(x, y, z)$  सम्बन्ध  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = K$  को संतुष्ट करता है, तो K का मान है –  
 (A) 9 (B) 3 (C) 1 (D)  $1/3$
8. समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसमें रेखाएँ  $2x-y+z-3=0$ ,  $3x+y+z=5$  स्थित है और जो बिन्दु  $(2, 1, -1)$  से  $\frac{1}{\sqrt{6}}$  की दूरी पर है।

**IIT-JEE-2004**

9. यदि रेखाएँ  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}$  और  $\frac{x-3}{1} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{1}$  परस्पर प्रतिच्छेद हैं, तो  $k=$   
 (A)  $\frac{2}{9}$  (B)  $\frac{9}{2}$  (C) 0 (D) -1
10. एक समतल  $(1, 1, 1)$  से गुजरता है और रेखाओं जिनके दिक् अनुपात  $(1, 0, -1)$  और  $(-1, 1, 0)$  है, के समान्तर है। समतल द्वारा X, Y और Z अक्षों पर काटे गए अन्तः खण्डों और मूलबिन्दु द्वारा बनाये गये चतुष्फलक का आयतन ज्ञात कीजिए।
11. समतल  $P_1$  और  $P_2$  मूलबिन्दु से गुजरते हैं।  $L_1$  और  $L_2$  भी मूलबिन्दु से गुजरती हैं।  $L_1, P_1$  पर है लेकिन  $P_2$  पर नहीं है और  $L_2, P_2$  पर है लेकिन  $P_1$  पर नहीं है। प्रदर्शित कीजिए कि बिन्दु A, B, C विद्यमान है और उनके क्रमचय A', B', C' इस प्रकार चुने जा सकते हैं कि  
 (i) A,  $L_1$  पर B,  $P_1$  पर है लेकिन  $L_1$  पर नहीं है और C,  $P_1$  पर नहीं है।  
 (ii) A',  $L_2$  पर है, B',  $P_2$  पर है लेकिन  $L_2$  पर नहीं है और C',  $P_2$  पर नहीं है।
12. एक समान्तरषट्फलक 'S' के आधार बिन्दु A, B, C और D है और ऊपरी पृष्ठ के बिन्दु A', B', C' और D' है। इस समान्तरषट्फलक को ऊपरी पृष्ठ द्वारा एक नया समान्तरषट्फलक T बनाये के लिए दबाया जाता है। T के ऊपरी पृष्ठ के बिन्दु A'', B'', C'', D'' है। 'T' का आयतन, S के आयतन का 90% है। सिद्ध करो कि A'' का बिन्दुपथ एक समतल है।

**IIT-JEE-2003**

13. रेखा  $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-k}{2}$  समतल  $2x-4y+z=7$  में स्थित हो, तो k का मान है –  
 (A) 7 (B) -7 (C) कोई वास्तविक मान नहीं (D) 4
14. (i) बिन्दुओं  $(2, 1, 0)$ ,  $(5, 0, 1)$  और  $(4, 1, 1)$  से गुजरने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए  
 (ii) यदि  $P(2, 1, 6)$  हैं, तो बिन्दु Q ज्ञात कीजिए जबकि PQ प्रथम भाग में ज्ञात किए गए समतल के लम्बवत् है और PQ का मध्य बिन्दु समतल पर है।

**4-B (पूर्ववर्ती AIEEE/DCE परीक्षा प्रश्न)**

15. माना कि समतलों  $2x+3y+z=1$  तथा  $x+3y+2z=2$  की प्रतिच्छेदन रेखा L है, यदि L धनात्मक X अक्ष के साथ कोण  $\alpha$  बनाती है, तब  $\cos\alpha$  बराबर है  
 (A)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C) 1 (D)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

16. यदि  $(2, 3, 5)$  गोले  $x^2+y^2+z^2-6x-12y-2z+20=0$  के व्यास का एक अंतिम सिरा है, दूसरे अंतिम सिरा के बिन्दु है  
 (A)  $(4, 9, -3)$  (B)  $(4, -3, 3)$  (C)  $(4, 3, 5)$  (D)  $(4, 3, -3)$
17. यदि एक रेखा प्रत्येक धनात्मक  $x$  तथा  $y$  अक्षों के साथ  $\frac{\pi}{4}$  कोण बनाती है, तब धनात्मक  $z$ -अक्ष के साथ बनने वाला कोण है  
 (A)  $\frac{\pi}{6}$  (B)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $\frac{\pi}{4}$  (D)  $\frac{\pi}{2}$
18. दो रेखायें  $x=ay+b$ ,  $z=cy+d$  तथा  $x=a'y+b'$ ,  $z=c'y+d'$  एक दूसरे के लम्बवत् है यदि  
 (A)  $aa'+cc'=1$  (B)  $\frac{a}{a'}+\frac{c}{c'}=-1$  (C)  $\frac{a}{a'}+\frac{c}{c'}=1$  (D)  $aa'+cc'=-1$
19. समतल  $x-2y=0$  में बिन्दु  $(-1, 3, 4)$  का प्रतिबिम्ब है  
 (A)  $(15, 11, 4)$  (B)  $(-\frac{17}{5}, -\frac{19}{5}, 1)$  (C)  $(8, 4, 4)$  (D)  $(\frac{9}{5}, -\frac{13}{5}, 4)$
20. यदि समतल  $2ax-3ay+4az+6=0$  गोले  $x^2+y^2+z^2+6x-8y-2z=13$  तथा  $x^2+y^2+z^2-10x+4y-2z=8$  के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु से गुजरता है तब  $a$  बराबर है -  
 (A) 2 (B) -2 (C) 1 (D) -1
21. यदि रेखा  $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{2}$  तथा समतल  $2x-y+\sqrt{\lambda}z+4=0$  के बीच का कोण  $\sin\theta=\frac{1}{3}$  तब  $\lambda$  का मान है  
 (A)  $-\frac{4}{3}$  (B)  $\frac{3}{4}$  (C)  $-\frac{3}{5}$  (D)  $\frac{5}{3}$
22. रेखाओं  $2x=3y=-z$  तथा  $6x=-y=-4z$  के बीच का कोण है -  
 (A)  $30^\circ$  (B)  $45^\circ$  (C)  $90^\circ$  (D)  $0^\circ$
23. समतल  $x+2y-z=4$  गोले  $x^2+y^2+z^2-x+z-2=0$  को एक वृत्त में काटता है, जिसकी त्रिज्या है -  
 (A)  $\sqrt{2}$  (B) 2 (C) 1 (D) 3
24. एक रेखा प्रत्येक  $x$  तथा  $z$ -अक्ष के साथ समान कोण  $\theta$  बनाती है, यदि  $y$  अक्ष के साथ  $\beta$  कोण इस प्रकार से बनाती है कि  $\sin^2\beta=3\sin^2\theta$  तब  $\cos^2\theta$  बराबर है -  
 (A)  $2/3$  (B)  $1/5$  (C)  $3/5$  (D)  $2/5$
25. दो समान्तर समतलों  $2x+y+2z=8$  तथा  $4x+2y+4z+5=0$  के बीच की दूरी है -  
 (A)  $3/2$  (B)  $5/2$  (C)  $7/2$  (D)  $9/2$
26. एक रेखा जिसकी दिक्कोज्याये  $2, 1, 2$  के समानुपाती है, प्रत्येक रेखायें  $x=y+a=z$  तथा  $x+a=2y=2z$  को मिलती है तब प्रत्येक प्रतिच्छेद बिन्दु निर्देशांक होंगे-  
 (A)  $(3a, 3a, 3a), (a, a, a)$  (B)  $(3a, 2a, 3a), (a, a, a)$  (C)  $(3a, 2a, 3a), (a, a, 2a)$  (D)  $(2a, 3a, 3a), (2a, a, a)$
27. यदि सरल रेखायें  $x=1+s, y=-3-\lambda s, z=1+\lambda s$  तथा  $x=\frac{t}{2}, y=1+t, z=2-t$  जिसके प्राचलिक क्रमशः  $s$  तथा  $t$  है, एक ही समतल में है, तब  $\lambda$  बराबर है 7  
 (A) -2 (B) -1 (C)  $-\frac{1}{2}$  (D) 0
28. दिये गये गोले  $x^2+y^2+z^2+7x-2y-z=13$  तथा  $x^2+y^2+z^2-3x+3y+4z=8$  का प्रतिच्छेद बिन्दु किसी भी एक गोले तथा समतल के प्रतिच्छेद बिन्दु के समान है, तब  
 (A)  $x-y-z=1$  (B)  $x-2y-z=1$  (C)  $x-y-2z=1$  (D)  $2x-y-z=1$
29. एक चतुष्फलक के शीर्ष बिन्दु  $O(0,0,0), A(1,2,1), B(2,1,3)$  तथा  $C(-1,1,2)$  है, तब फलको  $OAB$  तथा  $ABC$  के मध्य कोण होगा -

- (A)  $\cos^{-1}\left(\frac{19}{35}\right)$  (B)  $\cos^{-1}\left(\frac{17}{31}\right)$  (C)  $30^0$  (D)  $90^0$
30. उस वृत्त की त्रिज्या होगी जिसमें गोला  $x^2+y^2+z^2+2x-2y-4z-19=0$  समतल  $x+2y+2z+7=0$  के द्वारा कोटा जाता है -  
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
31. रेखाये  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{-k}$  तथा  $\frac{x-1}{k} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{1}$  एक ही समतल में है यदि  
 (A)  $k=0$  or  $-1$  (B)  $k=1$  or  $-1$  (C)  $k=0$  or  $-3$  (D)  $k=3$  or  $-3$
32. दो रेखाये  $x=ay+b, z=cy+d$  तथा  $x=a', y=b', z=c', y+d'$  लम्बवत् होगी, यदि और केवल यदि -  
 (A)  $aa'+bb'+cc'+1=0$  (B)  $aa'+bb'+cc'=0$   
 (C)  $(a+a')(b+b'+c+c')=0$  (D)  $aa'+cc'+1=0$
33. समतल  $12x+4y+3z=327$  से गोले  $x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z=155$  की न्यूनतम दूरी है -  
 (A) 26 (B)  $11\frac{4}{13}$  (C) 13 (D) 39
34. दो निर्देशांक अक्षों का मूल बिन्दु समान है, यदि एक समतल उनको मूल बिन्दु से  $a, b, c$  तथा  $a', b', c'$  दूरी पर काटता है, तब :  
 (A)  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} + \frac{1}{c'^2} = 0$  (B)  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} - \frac{1}{c'^2} = 0$   
 (C)  $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a'^2} - \frac{1}{b'^2} - \frac{1}{c'^2} = 0$  (D)  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a'^2} - \frac{1}{b'^2} - \frac{1}{c'^2} = 0$
35. यदि एक रेखा निर्देशांक अक्षों के साथ  $\alpha, \beta, \gamma$  कोण बनाती है, तब  
 (A)  $\cos^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$  (B)  $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$   
 (C)  $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$  (D)  $\sin^2\alpha + \cos^2\beta + \sin^2\gamma = 1$
36. समतल  $x+2y-3z+4=0$  के अभिलम्ब की द्विकोणजाये है -  
 (A)  $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}$  (B)  $-\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$   
 (C)  $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$  (D)  $\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}$
37. समतल का समीकरण जो कि निर्देशांक अक्षों पर मिलता है तथा जिसका केन्द्रक  $(a, b, c)$  है, होगा -  
 (A)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  (B)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$  (C)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$  (D)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{1}{3}$
38. मानाकि O मूलबिन्दु P मूलबिन्दु से 3 इकाई की दूरी पर है। यदि OP के Dr's  $(1, -2, -2)$  है, तो P के निर्देशांक है -  
 (A) 1, -2, -2 (B) 3, -6, -6 (C)  $1/3, -2/3, -2/3$  (D)  $1/9, -2/9, -2/9$
39. रेखाओं  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-3}$  तथा  $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$  के मध्य कोण है -  
 (A)  $\cos^{-1}\left(\frac{13}{9\sqrt{38}}\right)$  (B)  $\cos^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$  (C)  $\cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{38}}\right)$  (D)  $\cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{19}}\right)$
40. एक चर समतल मूल बिन्दु से अचर दूरी p पर है तथा यह अक्षों को A, B तथा C पर मिलता है, तब चतुष्फलक OABC के केन्द्रक का बिन्दुपथ है -  
 (A)  $x^2+y^2+z^2=16p^2$  (B)  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{16}{p}$   
 (C)  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 16$  (D) इनमें से कोई नहीं ।



41. यदि रेखा  $x=ay+b, z=cy+d$  तथा रेखा  $x=a'y+b', z=c'y+d'$  लम्बवत् है, तब  
 (A)  $aa'+cc'+1=0$  (B)  $aa'+bb'=1$  (C)  $aa'+bb'=0$  (D) इनमें से कोई नहीं
42. यदि एक रेखा एक घन के चार विकर्णों के साथ  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  कोण बनाती है तब  $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta$  बराबर होगा -  
 (A)  $4/3$  (B)  $3/4$  (C)  $1/4$  (D) इनमें से कोई नहीं
43. बिन्दु  $(1, 2, 3)$  से रेखा  $\frac{x-6}{3} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-7}{-2}$  पर डाले गये लम्ब की लम्बाई है -  
 (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
44. रेखा  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{12}$  तथा समतल  $x-y+z=5$  के प्रतिच्छेद बिन्दु से बिन्दु  $(-1, -5, -10)$  की दूरी है-  
 (A) 10 (B) 8 (C) 21 (D) 13
45. गोले  $x^2+y^2+z^2-4x-2y-6z-7=0$  के साथ समकेन्द्रीय तथा  $(0, 0, 0)$  से गुजरने वाले गोले का समीकरण है -  
 (A)  $x^2+y^2+z^2-4x-2y-6z=0$  (B)  $x^2+y^2+z^2=0$   
 (C)  $x^2+y^2+z^2-4x-2y=0$  (D) इनमें से कोई नहीं

## Answers

### EXERCISE # 1-A

1. B 2. C 3. B 4. A 5. D 6. A 7. A  
 8. B 9. B 10. B 11. A 12. D 13. A 14. D  
 15. A 16. B 17. AB 18. AB C 9. BD 20. AC

### EXERCISE # 1-B

2.  $(1/2, 1/2, 1/2)$  3.  $(a/2, b/2, c/2)$   
 4.  $3 : 2, (0, 13/5, 1)$  5.  $(2/3, -2/3, -1/3)$  6.  $60^\circ$   
 8.  $2 - 2\sqrt{2}$  9. (i)  $r \cdot \hat{n} = p$  (ii)  $\vec{r} \cdot (\vec{a}q - p\vec{b}) = 0$   
 10.  $x + y \pm \sqrt{2}z = 1$  11.  $\pi/2$   
 12.  $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{-2}$  13.  $11x - y - 3z = 35$   
 14.  $\frac{x-4}{9} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-7}{-3}$  15.  $\sqrt{26}$   
 16.  $x^2 + y^2 + z^2 - y - 2z - 14 = 0, \frac{317\pi}{24}$

### EXERCISE # 2-A

1. A 2. B 3. A 4. A 5. B 6. D 7. A

8. D 9. A 10. A 11. B 12. A 13. D 14. A  
 15. AD 16. ABC 17. BC 18. BD 19. ABCD  
 20. AB

### EXERCISE # 2-B

1.  $7x + 13y + 4z - 9 = 0; \left( \frac{12}{117}, -\frac{78}{117}, \frac{57}{117} \right)$   
 2.  $\frac{x-4}{9} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-7}{-3}$  3.  $\alpha = -1, \frac{80}{63}$   
 6.  $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}, \frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$   
 7.  $\frac{x+1}{11} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-1}{-15}$  8.  $\cos^{-1} \frac{4}{9}$   
 9.  $\sin^{-1} \frac{4}{\sqrt{30}}$  12.  $\frac{9}{2}$  13.  $\frac{1}{2}$  units  
 14. (i)  $\left( \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, -2 \right)$  (ii)  $\sqrt{\frac{39}{2}}$  (iii) 5 units

Download FREE Study Package from [www.TekoClasses.com](http://www.TekoClasses.com) & Learn on Video  
[www.MathsBySuhag.com](http://www.MathsBySuhag.com) Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

15.  $x^2+(y-5)^2+(z-5)^2=81$

**EXERCISE # 3**

1. (A)→(r), (B)→(s), (C)→(q), (D)→(p)

2. (A)→(p), (B)→(q), (C)→(r), (D)→(s)

3. A 4. C 5. D 6. B 7.1 C 7.2 B 7.3 A

8.1 B 8.2 C 8.3 A 9. True 10. True

11. False 12. True 13. False 14.  $\frac{1}{3}$

15.  $x^2+y^2+z^2=9$  16. 4 17. 205 18. 486

**EXERCISE # 4**

1. D 2.1 B 2.2 D 2.3 C 3. D

4. (A)→(r), (B)→(q), (C)→(p), (D)→(s)

5. (a)→(S), (b)→(P), (c)→(Q,R), (d)→(S)

6. (a)→(Q), (b)→(S), (c)→(R), (d)→(S)

7. A 8.  $62x+29y+19z-105=0$  9. B

10.  $\frac{9}{2}$  13. A 14. (i)  $x+y-2z=3$  (ii) Q(6,5,-2)

15. A 16. A 17. D 18. D 19. D 20. B 21. D

22. C 23. C 24. C 25. C 26. B 27. A 28. D

29. A 30. C 31. C 32. D 33. C 34. D 35. C

36. D 37. C 38. A 39. B 40. A 41. A 42. A

43. D 44. D 45. A

## MQB

### EXERCISE # 1 (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1.  $A=(2,3,5)$ ,  $B(-1,2,2)$  तथा  $C(\lambda,5,\mu)$  एक त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं। यदि A से जाने वाली माध्यिका अक्षों से समान कोण बनाती हों तो –  
 (A)  $\lambda=\mu=5$  (B)  $\lambda=5,\mu=7$  (C)  $\lambda=6,\mu=9$  (D)  $\lambda=0,\mu=0$
  2. एक दर्पण और एक प्रकाश स्रोत क्रमशः मूलबिन्दु O और OX पर एक बिन्दु पर स्थित हैं। स्रोत से उत्सर्जित एक प्रकाश किरण दर्पण से टकराकर परावर्तित होती है। यदि समतल के अभिलम्ब के दिक् अनुपात 1, -1, 1 हों, तो परावर्तित किरण की दिक् कोज्याएँ हैं –  
 (A)  $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$  (B)  $-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$  (C)  $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$  (D)  $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$
  3. यदि समतल  $x-cy-bz=0$ ,  $cx-y+az=0$  तथा  $bx+ay-z=0$  एक सरल रेखा से गुजरते हैं तो  $a^2+b^2+c^2+2abc$  का मान है –  
 (A) 1 (B) 7 (C)  $\frac{7}{2}$  (D)  $\frac{8}{3}$
  4. Z अक्ष तथा रेखा  $x+y+2z-3=0, 2x+3y+4z-4=0$  के मध्य न्यूनतम दूरी है –  
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) इनमें से कोई नहीं
  5. रेखा  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$ , वक्र  $xy=c^2, z=0$  को प्रतिच्छेद करती है तो c का मान है –  
 (A)  $\pm 1$  (B)  $\pm \frac{1}{3}$  (C)  $\pm \sqrt{5}$  (D) इनमें से कोई नहीं
  6. समष्टि में एक बिन्दु की गति के समीकरण  $x=2t, y=-4t, z=4t$  हैं, जहाँ t को घंटों में और गतिशील बिन्दु के निर्देशांकों को किलोमीटर में लिखा जाता है। 10 घंटों में प्रारम्भ बिन्दु O (0,0,0) से गतिशील बिन्दु की दूरी है –  
 (A) 20 km (B) 40 km (C) 60 km (D) 55 km
  7. यदि  $ax+by+cz=p$  हो, तो  $x^2+y^2+z^2$  का न्यूनतम मान है –  
 (A)  $\frac{p}{\sum a}$  (B)  $\frac{p^2}{\sum a^2}$  (C)  $\frac{\sum a^2}{p}$  (D) 0
  8. तीन परस्पर लम्बवत रेखाओं जिनकी दिक् कोज्याएँ  $l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3$  हैं से समान कोण बनाने वाली रेखा की दिक् कोज्याएँ हैं –  
 (A)  $l_1+l_2+l_3, m_1+m_2+m_3, n_1+n_2+n_3$  (B)  $\frac{l_1+l_2+l_3}{\sqrt{3}}, \frac{m_1+m_2+m_3}{\sqrt{3}}, \frac{n_1+n_2+n_3}{\sqrt{3}}$   
 (C)  $\frac{l_1+l_2+l_3}{3}, \frac{m_1+m_2+m_3}{3}, \frac{n_1+n_2+n_3}{3}$  (D) इनमें से कोई नहीं
- यदि रेखाएँ  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{-\lambda}$  तथा  $\frac{x-1}{\lambda} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{1}$  समतलीय हो तो  $\lambda$  है –  
 (A) 1, -1 (B) 3, -3 (C) 0, -3 (D) 0, -1
10. रेखाएँ  $\frac{x-a+d}{\alpha-\delta} = \frac{y-a}{\alpha} = \frac{z-a-d}{\alpha+\delta}, \frac{x-b+c}{\beta-\gamma} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-b-c}{\beta+\gamma}$  समतलीय हैं तो उस समतल का समीकरण जिसमें ये रेखाएँ स्थित हैं, होगा –  
 (A)  $x+y+z=0$  (B)  $x-y+z=0$  (C)  $x-2y+z=0$  (D)  $x+y-2z=0$

11. बिन्दु (2, -3, 1) तथा (3, -4, 5) को मिलाने वाली रेख समतल  $2x+y+z=7$  को जिस बिन्दु पर काटती है उसके निर्देशांक है -  
 (A) (2, 1, 0) (B) (3, 2, 5) (C) (1, -2, 7) (D) इनमें से कोई नहीं
12. उस गोले का समीकरण जो बिन्दुओं (0, 0, 0) (0, 0, 1) तथा (0, 0, 1) से गुजरता है तथा जिसकी त्रिज्या जितनी छोटी सम्भव हो सके उतनी छोटी है -  
 (A)  $3\sum x^2 - 2\sum x - 1 = 0$  (B)  $\sum x^2 - \sum x - 1 = 0$   
 (C)  $3\sum x^2 - 2\sum x + 1 = 0$  (D)  $\sum x^2 - \sum x + 1 = 0$
13. मूल बिन्दु तथा बिन्दु (-2, 1, 2) को मिलाने वाली रेखा यदि अक्षों की धनात्मक दिशा से  $\theta_1, \theta_2$  तथा  $\theta_3$  कोण बनाती हो तो  $\cos 2\theta_1 + \cos 2\theta_2 + \cos 2\theta_3$  का मान है -  
 (A) -1 (B) 1 (C) 2 (D) -2
14. यदि रेखाएँ  $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{5\mu-3} = \frac{z}{6}$  तथा  $\frac{x+2}{4\lambda+1} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{-18}$  एक दूसरे के समान्तर हो, तो युग्म  $(\lambda, \mu)$  का मान है -  
 (A)  $\left(2, -\frac{1}{3}\right)$  (B)  $\left(2, \frac{1}{3}\right)$  (C)  $\left(-2, \frac{1}{3}\right)$  (D) निकला नहीं जा सकता
15. बिन्दु A (a,b,c) से गुजरने वाली रेखा जिसकी दिक्कोज्याएँ  $l, m, n$  हैं कि बिन्दु P(p,q,r) से लम्बवत दूरी का वर्ग है -  
 (A)  $\sum \{(q-b)n - (r-c)m\}^2$  (B)  $\sum \{(q+b)n - (r+c)m\}^2$   
 (C)  $\sum \{(q-b)n + (r-c)m\}^2$  (D) इनमें से कोई नहीं
16. रेखा  $x-3=(1/2)(y-4) = (1/2)(z-5)$  तथा समतल  $x+y+z=17$  के प्रतिच्छेद बिन्दु की बिन्दु (3, 4, 5) से दूरी है -  
 (A) 2 (B) 3 (C) 1/3 (D) 1/2
17. रेखा  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{4}$  तथा समतल  $2x+y-3z+4=0$  के मध्य का को है -  
 (A)  $\sin^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{406}}\right)$  (B)  $\sin^{-1}\left(\frac{14}{\sqrt{406}}\right)$  (C)  $\sin^{-1}\left(\frac{4}{14\sqrt{29}}\right)$  (D) इनमें से कोई नहीं
18. वृत्त  $x+2y+2z=15, x^2+y^2+z^2-2y-4z=11$  के केन्द्र के निर्देशांक तथा त्रिज्या है -  
 (A) (4,3,1),  $\sqrt{5}$  (B) (3,4,1),  $\sqrt{6}$  (C) (1,3,4),  $\sqrt{7}$  (D) इनमें से कोई नहीं
19. एक गोले का समीकरण, जिसका केन्द्र अष्टांक (octant) में स्थित है और जो वृत्त  $x^2+y^2=4, z=0$  से गुजरता है और समतल  $x+2y+2z=0$  द्वारा 3 त्रिज्या के एक वृत्त में काटा जाता है, हैं -  
 (A)  $x^2+y^2+z^2=0$  (B)  $x^2+y^2-6y-4=0$   
 (C)  $x^2+y^2+z^2-6z-4=0$  (D)  $x^2+y^2-6x-6y-4=0$
20. यदि निश्चित बिन्दु (a, b, c) से गुजरने वाले समतल पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्बपाद का बिन्दुपथ एक गोला हो तो उस गोले की त्रिज्या है -  
 (A)  $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$  (B)  $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$  (C)  $a^2+b^2+c^2$  (D) इनमें से कोई नहीं

-----  
 एक से अधिक विकल्प सही

21. यदि मूल बिन्दु से एक समतल पर डाले गये लम्ब की लम्बाई 7 इकाई तथा इसका दिक्अनुपात -3, 2, 6, तो तो समतल का समीकरण है -  
 (A)  $-3x+2y+6z-7=0$  (B)  $-3x+2y+6z-49=0$

(C)  $3x-2y-6z-49=0$

(D)  $-3x+2y-6z-49=0$

22. माना कि PQ बिन्दु P (5, 7, 3) से रेखा  $\frac{x-15}{3} = \frac{x-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$  पर डाला लम्ब है जहाँ Q लम्बपाद है तो –  
 (A) Q (9, 13, -15) है  
 (B) PQ=14  
 (C) उस समतल का समीकरण जो PQ तथा दी गयी रेखा को रखता है  $9x-4y-z-14=0$  है –  
 (D) इनमें से कोई नहीं

**EXERCISE # 2 (विषयात्मक प्रश्न)**

1. माना बिन्दु P(1, 2, 3) से x-y समतल पर लम्ब PM है। यदि OP, z-अक्ष की धनात्मक दिशा से  $\theta$  कोण बनाता है और OM, x-अक्ष की धनात्मक दिशा से  $\phi$  कोण बनाता है, जहाँ O मूल बिन्दु है, तो  $\theta$  और  $\phi$  ज्ञात कीजिए।
2. सिद्ध करो कि रेखा  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{1}$  समतल  $3x+4y+6z+7=0$  में स्थित है, यदि समतल को तब तक घुमाया जाता है जब तक समतल मूल बिन्दु से ना गुजरे तब नई स्थिति में समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये
3. रेखाओं  $\frac{x-1}{l} = \frac{x+1}{m} = \frac{z}{n}$  तथा  $\frac{x+1}{m} = \frac{y-3}{n} = \frac{z-1}{l}$  के मध्य न्यूनकोण ज्ञात कीजिये जहां  $l > m > n$ , तथा l, m, n त्रिघातीय समीकरण  $x^3+x^2-4x=4$  के मूल है
4. एक रेखा  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-k}{3}$  y-z समतल तथा x-y समतल को क्रमशः A तथा B पर काटती है। यदि  $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$  तब K ज्ञात कीजिये जहां O मूल बिन्दु है।
5. सिद्ध कीजिए कि रेखा  $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$  समतल  $x+y+z=1$  में स्थित है। उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (0, 0, 1) से गुजरती है तथा दी गयी रेखा  $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$  कोण बनाती है।
6. माना P(, 3, 5) तथा Q(-2, 1, 4) दो बिन्दु है जिनस x-z समतल पर क्रमशः PM तथा QN लम्ब डाले जाते है। रेखा MN तथा QN द्वारा समतल  $x+y+z=5$  के साथ बनाया गया कोण ज्ञात कीजिये।

**Answers**

**EXERCISE # 1**

1. C 2. D 3. A 4. B 5. C 6. C 7. B  
 8. B 9. C 10. C 11. C 12. A 13. A 14. B  
 15. A 16. B 17. A 18. C 19. C 20. B

21. B C 22. BC

**EXERCISE # 2**

1.  $\theta = \cos^{-1} \frac{3}{\sqrt{14}}$  and  $\phi = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}}$

Download FREE Study Package from [www.TekoClasses.com](http://www.TekoClasses.com) & Learn on Video  
[www.MathsBySuhag.com](http://www.MathsBySuhag.com) Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

3.  $\cos^{-1} \frac{4}{9}$  4.  $\frac{9}{2}$  6.  $\sin^{-1} \frac{4}{\sqrt{30}}$

**for 39 Yrs. Que. of IIT-JEE  
&  
15 Yrs. Que. of AIEEE  
we have distributed already  
a book**