

विध्न विचारत भीरु जन, नहीं आरम्भे काम,
विपति देख छोड़े तुरंत मध्यम मन कर श्याम।
पुरुष सिंह संकल्प कर, सहते विपति अनेक,
'बना' न छोड़े ध्येय को, रघुबर राखे टेक।।

रचित: मानव धर्म प्रणेता

सद्गुरु श्री रणछोड़दासजी महाराज

अनुक्रम एवं श्रेणी (Sequence & series)

“1729 is a very interesting number; it is the smallest number expressible as the sum of two different ways.”S.R. amanujan

अनुक्रम (Sequence):

अनुक्रम वह फलन है जिसका प्रान्त प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय N है। चूंकि प्रत्येक अनुक्रम के लिए प्रान्त, प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय है अतः अनुक्रम को उसके परिसर से प्रदर्शित करते हैं। यदि $f : N \rightarrow R$ हो, तो $f(n) = t_n, n \in N$ अनुक्रम कहलाता है और इसे निम्न प्रकार प्रदर्शित किया जाता है—

$$\{f(1), f(2), f(3), \dots\} = \{t_1, t_2, t_3, \dots\} = \{t_n\}$$

वास्तविक अनुक्रम (Real Sequence):

वह अनुक्रम जिसका परिसर R का उपसमुच्चय है, वास्तविक अनुक्रम कहलाता है।

- उदाहरणतः
- 2, 5, 8, 11,
 - 4, 1, -2, -5,
 - 3, -9, 27, -81,

अनुक्रम के प्रकार (Types of Sequence):

पदों की संख्या के आधार पर अनुक्रम दो प्रकार के होते हैं।

- परिमित अनुक्रम : अनुक्रम परिमित कहलाता है यदि इसके पदों की संख्या निश्चित हो।
- अपरिमित अनुक्रम : अनुक्रम अपरिमित कहलाता है यदि इसके पदों की संख्या अपरिमित हो।

श्रेणी (Series) :

किसी अनुक्रम के पदों को जोड़ने या घटाने पर हमें एक व्यंजक प्राप्त होता है जो श्रेणी कहलाता है। यदि $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ अनुक्रम हो, तो व्यंजक $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ एक श्रेणी है।

- उदाहरण
- $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$
 - $2 - 4 - 8 - 16 - \dots$
 - $-1 + 3 - 9 + 27 - \dots$

श्रेणी (Progression):

श्रेणी शब्द का प्रयोग अनुक्रम या श्रेणी (परिमित या अनन्त) के स्थान पर किया जाता है।

समान्तर श्रेणी (Arithmetic progression (A.P.):

समान्तर श्रेणी वह अनुक्रम है जिसके पद एक निश्चित संख्या से घटते या बढ़ते हैं। यह निश्चित संख्या सार्व अन्तर कहलाती है। यदि प्रथम पद a एवं सार्वअन्तर d हो, तो समान्तर श्रेणी को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है—

$$a + d, a + 2d, \dots, a + (n - 1)d, \dots$$

उदाहरणतः -4, -1, 2, 5,

समान्तर श्रेणी का n वाँ पद (nth term of an A.P.)

माना कि किसी समान्तर श्रेणी का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है, तब

$$t_n = a + (n - 1)d \quad \text{जहाँ} \quad d = a_n - a_{n-1}$$

समान्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योग (The sum of first n terms of an A.P.)

यदि प्रथम पद a एवं सार्वअन्तर d हो, तो समान्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] = \frac{n}{2}[a + l] = nt \left(\frac{n+1}{2} \right)$$

जहाँ l अंतिम पद है एवं $t \left(\frac{n+1}{2} \right)$ मध्य पद है।

नोट: किसी अनुक्रम $\{t_n\}_n$ जिसके प्रथम r पदों का योग S_r है, के लिए r वाँ पद $t_r = S_r - S_{r-1}$.

समान्तर श्रेणी के गुणधर्म (Properties of A.P.):

- (i) प्रथम पद और सार्वअन्तर शून्य, धनात्मक या ऋणात्मक (या कोई सम्मिश्र संख्या) हो सकते हैं।
- (ii) यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में हो, तो $2b = a + c$ और यदि a, b, c, d समान्तर श्रेणी में हो, तो $a + b = b + c$.
- (iii) किसी समान्तर श्रेणी में तीन संख्याएँ $a - d, a, a + d$ ली जा सकती हैं। चार संख्याएँ $3 - 3d, a - d, a + d, a + 3d$; पाँच संख्याएँ $a - 2d, a - d, a + d, a + 2d$ एवं छः पद $a - 5d, a - 3d, a - d, a + d, a + 3d, a + 5d$ आदि ले सकते हैं।
- (iv) स.श्रे. के प्रारम्भ तथा अन्त से समान दूरी पर स्थित पदों का योग अचर होता है तथा प्रथम एवं अंतिम पद के योग के बराबर होता है।
- (v) किसी समान्तर श्रेणी का कोई पद (प्रथम पद के आलावा) उससे समान दूरी पर स्थित पदों के योगफल का आधा होता है अर्थात् $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-k} + a_{n+k})$, $k < n$.
 $k = 1$ के लिए $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$;
 $k = 2$ के लिए $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-2} + a_{n+2})$ तथा इसी तरह आगे।
- (vi) किसी समान्तर श्रेणी के प्रत्येक पद को किसी अशून्य संख्या से बढ़ाकर, घटाकर, गुणा कर या विभाजित करके लिखने पर प्राप्त अनुक्रम भी एक समान्तर श्रेणी होती है।
- (vii) दो समान्तर श्रेणियों का योग या अन्तर भी एक समान्तर श्रेणी होती है।

समान्तर माध्य (माध्य या औसत) (सा.मा.) : (Arithmetic Mean (Mean or Average) (A.M.):)

यदि तीन संख्याएँ समान्तर श्रेणी में हो, तो मध्य पद अन्य दो पदों का समानतर माध्य कहलाता है। अतः यदि a, b, c स.श्रे. में हो, तो a एवं c का समान्तर माध्य b है।

किन्हीं n संख्याओं a_1, a_2, \dots, a_n के लिए समान्तर माध्य $A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$ होता है।

दो संख्याओं के मध्य n - समान्तर माध्य (n - Arithmetic means between two numbers):

यदि कोई दो संख्याएँ a एवं b हैं और $a, A_1, A_2, \dots, A_n, b$, स.श्रे. में हो तो, a और b के मध्य n समान्तर माध्य A_1, A_2, \dots, A_n हैं।

$$A_1 = a + \frac{b-a}{n+1}, A_2 = a + \frac{2(b-a)}{n+1}, \dots, A_n = a + n \frac{b-a}{n+1}$$

नोट : a एवं b के मध्य निवेशित n स.माध्यों का योग, a और b के मध्य केवल एक स.मा. का n गुना होता है।

अर्थात् $\sum_{r=1}^n A_r = nA$, जहाँ A , a एवं b के मध्य केवल एक स.मा. है।

गुणोत्तर श्रेणी (Geometric progression (G.P.)) :

गुणोत्तर श्रेणी उन संख्याओं का अनुक्रम है जिनका प्रथम पद अशून्य है और प्रत्येक आने वाला पद उसके पीछे वाले पद को एक अचर राशि से गुणा करने पर प्राप्त होता है। इस प्रकार एक गुणोत्तर श्रेणी में क्रमागत पदों का अनुपात अचर होता है। इस अचर राशि को श्रेणी का सार्व अनुपात कहते हैं तथा इसलिए $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \dots$ एक गु.श्रे. जिसका प्रथम पद a और सार्व अनुपात r है।

उदाहरण (i) 2, 4, 8, 16

(ii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$

परिणाम :

(i) n वॉ पद $= ar^{n-1}$

(ii) प्रथम n पदों का योग $S_n = \begin{cases} \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, & r \neq 1 \\ na & r = 1 \end{cases}$

(iii) गु.श्रे. के अनन्त पदों का योग जब $|r| < 1$, जब $n \rightarrow \infty r^n \rightarrow 0$ यदि $|r| < 1$ इसलिए

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} (|r| < 1)$$

गुणोत्तर श्रेणी के गुणधर्म (Properties of G.P.)

(i) यदि a, b, c गु.श्रे. में हो, तो $b^2 = ac$, व्यापक रूप में यदि $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n$ गु.श्रे. में हो, तो $a_1 a_n = a_1 a_{n-1} = a_3 a_{n-2} = \dots$

(ii) सामान्यता गु.श्रे. के तीन क्रमागत पद $\frac{a}{r}, a, ar$, लिए जा सकते हैं।

(iii) सामान्यता गु.श्रे. के चार क्रमागत पद $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$ लिए जा सकते हैं।

(iv) यदि गु.श्रे. के प्रत्येक पद को गुणा, भाग या उसकी घात को किसी अशून्य राशि से बढ़ा दी जाए तो प्राप्त अनुक्रम भी गु.श्रे. होगा।

(v) यदि r_1 एवं r_2 सार्व अनुपात वाली दो गुणोत्तर श्रेणियाँ क्रमशः a_1, a_2, a_3, \dots और b_1, b_2, b_3, \dots हो, तो अनुक्रम $a_1 b_2, a_2 b_2, a_3 b_3, \dots$ भी गु.श्रे. में होगा। जिसका सार्व अनुपात $r_1 r_2$ है।

(vi) यदि a_1, a_2, a_3, \dots जहाँ प्रत्येक $a_i > 0$, गु.श्रे. हो तो, $\log a_1, \log a_2, \log a_3, \dots$ स.श्रे. में होते हैं तथा इसका विलोम भी

सत्य है।

गुणोत्तर माध्य Gemetric means (means proportional) (G.M.):

यदि a,b,c गुणोत्तर श्रेणी में हो, तो a और c के मध्य गुणोत्तर माध्य b है।

यदि a और c दोनों धनात्मक हैं, तो $b = \sqrt{ac}$ और यदि a और c दोनों ऋणात्मक हो, तो $b = -\sqrt{ac}$. $b^2 = ac$ इसलिए $b = \sqrt{ac}$; ; $a > 0, c > 0$.

a, b के मध्य n-गुणोत्तर माध्य (n-Geometric means between a, b) :

यदि दो संख्याएँ a एवं b दी गई हैं और a, G_1, G_2, \dots, G_n, b , गु.श्रे. में हो, तो a एवं b के मध्य n गुणोत्तर माध्य $G_1, G_2,$

G_3, \dots, G_n है। $G_1 = a(b/a)^{1/n+1}, G_2 = a(b/a)^{2/n+1}, \dots, G_n = a(b/a)^{n/n+1}$

नोट : यदि a और b के मध्य n गुणोत्तर माध्यों का गुणनफल a और b के मध्य केवल एक गुणोत्तर माध्य की n वीं घात के बराबर होता है।

अर्थात् $\prod_{r=1}^n G_r = (\sqrt[n]{ab})^n = (G)^n$ जहाँ a एवं b के मध्य केवल एक गुणोत्तर माध्य G है।

हरात्मक श्रेणी (Harmonic progression (H.P.))

कोई अनुक्रम हरात्मक श्रेणी कहलाता है यदि इसके पदों का व्युत्क्रम समान्तर श्रेणी में है। यदि अनुक्रम $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

हरात्मक श्रेणी में हो, तो $1/a_1, 1/a_2, \dots, 1/a_n$ समान्तर श्रेणी में होते हैं।

नोट :

(i) हरात्मक श्रेणी के n पदों के योग के लिए कोई सूत्र नहीं है हरात्मक श्रेणी जिसका प्रथम पद a और द्वितीय पद b है, के लिए n वाँ पद $t_n = \frac{ab}{b + (n-1)(a-b)}$

(ii) यदि a,b,c हरात्मक श्रेणी में हो, तो $b = \frac{2ac}{a+c}$ या $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$

(iii) यदि a,b,c समान्तर श्रेणी में हो तो $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a}$

(iv) यदि a,b,c गुणोत्तर श्रेणी में हो, तो $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}$

हरात्मक माध्य (Harmonic Mean):

यदि a,b,c हरात्मक श्रेणी में हो, तो a और c के मध्य हरात्मक माध्य b है तथा $b = 2ac/[a + c]$.

यदि a_1, a_2, \dots, a_n , 'n' अशून्य संख्याएँ हो, तो इन संख्याओं का हरात्मक माध्य H निम्न प्रकार है—

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right]$$

माध्यों में सम्बन्ध (Relation between means):

- (i) यदि धनात्मक तथा असमान संख्याओं a एवं b के मध्य समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य, हरात्मक माध्य क्रमशः A, G, H हो, तो
 $G^2 = AH$ अर्थात् A, G, H गुणोत्तर श्रेणी में है और $A \geq G \geq H$.

A.M. \geq G.M. \geq H.M.

यदि $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ धनात्मक वास्तविक संख्याएं हो, तो उनका समान्तर माध्य निम्न प्रकार परिभाषित है—

$$A.M. = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$$

$$\text{इनका गुणोत्तर माध्य} = (a_1 a_2 a_3 \dots a_n)^{1/n} \text{ एवं इनका हरात्मक माध्य} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

इसे $A.M. \geq G.M. \geq H.M.$ द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है एवं समता केवल तभी सन्तुष्ट होती है यदि और केवल यदि $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$

समान्तर गुणोत्तर श्रेणी : (Arithmetico - Geometric Series) :

वह श्रेणी जिसे A.P. और G.P. के प्रत्येक संगत पद को गुणा करके बनाया जाता है, समान्तर गुणोत्तर श्रेणी कहलाती है।

उदाहरण : $1 + 3a + 5x^2 + 7x^3 + \dots$

यहाँ $1, 3, 5, \dots$ समान्तर श्रेणी में है और $1, x, x^2, x^3, \dots$ गुणोत्तर श्रेणी में है।

समान्तर गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योग (Sum of n terms of an arithmetico-geometric series) :

माना $S_n = a + (a + d)r + (a + 2d)r^2 + \dots + [a + (n - 1)d]r^{n-1}$

$$\text{तब } S_n = \frac{a}{1-r} + \frac{dr(1-r^{n-1})}{(1-r)^2} - \frac{[a + (n-1)d]r^n}{1-r}, r \neq 1.$$

अनन्त पदों का योगफल (Sum to infinity) :

यदि $|r| < 1$ एवं $n \rightarrow \infty$ हो, तब $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \Rightarrow S_\infty = \frac{a}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2}$.

$$\therefore S_\infty = \frac{a}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2}$$

परिणाम (Results) :

(i) $\sum_{r=1}^n (a_r \pm b_r) = \sum_{r=1}^n a_r \pm \sum_{r=1}^n b_r$ (ii) $\sum_{r=1}^n k a_r = k \sum_{r=1}^n a_r$.

(iii) $\sum_{r=1}^n k = k + k + k \dots \dots n$ पदों तक = nk ; जहाँ k अचर है।

(iv) $\sum_{r=1}^n r = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(v) $\sum_{r=1}^n r^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$(vi) \quad \sum_{r=1}^n r^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$(vii) \quad 2 \sum_{i < j=1}^n a_i a_j = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

n वॉ पद ज्ञात करने के लिए अन्तरविधि (Method of difference for finding nth term) :

यदि u_1, u_2, u_3, \dots एक अनुक्रम इस प्रकार है, कि $u_2 - u_1, u_3 - u_2, \dots$ या तो समान्तर श्रेणी हो या गुणोत्तर श्रेणी हो, तो इस अनुक्रम का n वॉ पद निम्न प्रकार ज्ञात किया जा सकता है—

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \quad \dots\dots(i)$$

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n \quad \dots\dots(ii)$$

$$(i) - (ii) \Rightarrow u_n = u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \dots + (u_n - u_{n-1})$$

जहाँ श्रेणी $(u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \dots + (u_n - u_{n-1})$ या तो समान्तर श्रेणी में है या गुणोत्तर में है, तो हम u_n ज्ञात कर सकते

$$\text{है और इस प्रकार श्रेणी का योगफल } S = \sum_{r=1}^k u_r \text{ होता है।}$$

नोट : उपरोक्त विधि को निम्न प्रकार व्यापक बनाया जा सकता है—

माना कि u_1, u_2, u_3, \dots दिया गया एक अनुक्रम है

प्रथम अन्तर $\Delta_1 u_1, \Delta_1 u_2, \Delta_1 u_3, \dots$ जहाँ $\Delta_1 u_1 = u_2 - u_1, \Delta_1 u_2 = u_3 - u_2$ इत्यादि

द्वितीय अन्तर $\Delta_2 u_1, \Delta_2 u_2, \Delta_2 u_3, \dots$ जहाँ $\Delta_2 u_1 = \Delta_1 u_2 - \Delta_1 u_1, \Delta_2 u_2 = \Delta_1 u_3 - \Delta_1 u_2$ इत्यादि

यह प्रक्रिया तब तक जारी रहती है जब तक कि k वॉ अन्तर $\Delta_k u_1, \Delta_k u_2, \dots$ प्राप्त न हो जाए जहाँ k वॉ अन्तर में सभी अन्तर बराबर होंगे या ये एक गुणोत्तर श्रेणी बनायेगे जिसका सार्वअनुपात 1 से अलावा कोई संख्या होगा।

स्थिति -1 : सभी k वॉ अन्तर समान हो

इस स्थिति में n वें पद u_n को निम्न प्रकार दिया जाता है।

$$u_n = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k, \text{ जहाँ } a_0, a_1, \dots, a_k \text{ का मान अनुक्रम के 'k + 1' पदों के उपयोग से निकाला जाता है।}$$

स्थिति -2: सभी k वॉ अन्तर गुणोत्तर श्रेणी में हो जिसका सार्वअनुपात $r (r \neq 1)$

$$\text{इस स्थिति में n वे पद } u_n \text{ को निम्न प्रकार दिया जाता है } u_n = \lambda r^n + a_0 n^{k-1} + a_1 n^{k-2} + \dots + a_{k-1}$$

S_n ज्ञात करने के लिए अन्तरविधि (Method of difference for finding S_n) :

यदि संभव हो, तो r वें पद को दो पदों के अन्तर से व्यक्त करना चाहिए जैसे $t_r = f(r) - f(r \pm 1)$. यह निम्नलिखित उदाहरण की सहायता से समझाया जा सकता है।

$$t_1 = f(1) - f(0),$$

$$t_2 = f(2) - f(1),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$t_n = f(n) - f(n-1) \Rightarrow S_n = f(n) - f(0)$$



Exercise - 1

1-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. क्रमागत पूर्णाकों वाली एक समान्तर श्रेणी का प्रथम पद $p^2 + 1$ है। इस श्रेणी के $(2p + 1)$ पदों के योग को प्रदर्शित करने वाला पद है—
 (A) $(p + 1)^2$ (B) $(2p + 1)(p + 1)^2$ (C) $(p + 1)^3$ (D) $p^3 + (p + 1)^3$
2. यदि a_1, a_2, a_3, \dots समान्तर श्रेणी में है, ताकि $a_1 + a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} + a_{24} = 225$ हो, तो $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{23} + a_{24} =$
 (A) 909 (B) 75 (C) 750 (D) 900
3. 1 से 100 तक पूर्णाकों का योग जो 2 या 5 से विभाजित है—
 (A) 2550 (B) 1050 (C) 3050 (D) इनमें से कोई नहीं
4. यदि किसी बहुभुज के आंतरिक कोण स.श्रे. में हो तथा उसका सबसे छोटा कोण 120° एवं सार्वान्तर 5° हो, तो बहुभुज में भुजाओं की संख्या है—
 (A) 7 (B) 9 (C) 16 (D) इनमें से कोई नहीं
5. एक समान्तर श्रेणी का प्रथम पद 'a' और सार्वान्तर 'd' है। माना S_k श्रेणी के प्रथम K पदों के योगफल को प्रदर्शित करता है। यदि $\frac{S_{kx}}{S_x}$ x पर निर्भर नहीं हो तो, —
 (A) $a = d/2$ (B) $a = d$ (C) $a = 2d$ (D) इनमें से कोई नहीं
6. यदि संख्याएँ $5^{1-x} + 5^{1-x}, a/2, 25^x + 25^{-x}, x \in R$ एक स.श्रे. बनाती हो, तो a के मानों का अन्तराल है—
 (A) [1, 5] (B) [2, 5] (C) [5, 12] (D) [12, ∞)
7. यदि 3 और 54 के मध्य n समान्तर माध्य इस प्रकार है कि 8 वाँ माध्य: $(n - 2)^{\text{th}}$ वाँ माध्य :: 3 : 5 हो, तो n का मान है—
 (A) 12 (B) 16 (C) 18 (D) 20
8. एक गु.श्रे. का तीसरा पद 4 है, तो पहले 5 पदों का गुणनफल है—
 (A) 4^3 (B) 4^5 (C) 4^4 (D) इनमें से कोई नहीं
9. माना a, b, c स.श्रे. में है एवं $|r|, |b|, |c| < 1$, यदि $x = 1 + a + a^2 + \dots \infty$
 $y = 1 + b + b^2 + \dots \infty$ एवं $z = 1 + c + c^2 + \dots \infty$ हो, तो x, y, z है —
 (A) स.श्रे. में (B) गु.श्रे. में (C) ह.श्रे. में (D) इनमें से कोई नहीं
10. यदि गु.श्रे. जिसका प्रथम पद 'a' है, के अनन्त पदों का योगफल S हो, तो प्रथम n पदों का योगफल है—
 (A) $S \left(1 - \frac{a}{S}\right)^n$ (B) $S \left[1 - \left(1 - \frac{a}{S}\right)^n\right]$ (C) $a \left[1 - \left(1 - \frac{a}{S}\right)^n\right]$ (D) इनमें से कोई नहीं
11. श्रेणी $\frac{1}{\log_2 4} + \frac{1}{\log_4 4} + \frac{1}{\log_8 4} + \dots + \frac{1}{\log_{2^n} 4}$ का योग है—
 (A) $\frac{1}{2} n(n+1)$ (B) $\frac{1}{12} n(n+1)(2n+1)$

- (C) $\frac{1}{n(n+1)}$ (D) $\frac{1}{4}n(n+1)$
12. किसी अनुक्रम $\{a_n\}$ के लिए $a_1 = 2$ और $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$ हो, तो $\sum_{r=1}^{20} a_r$ का मान है—
 (A) $\frac{20}{2}[4 + 19 \times 3]$ (B) $3\left(1 - \frac{1}{3^{20}}\right)$
 (C) $2(1 - 3^{20})$ (D) इनमें से कोई नहीं
13. यदि α, β समीकरण $x^2 - 3x + a = 0$ के मूल एवं γ, δ समीकरण $x^2 - 12x + b = 0$ के मूल है और संख्याएँ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (इसकी क्र में) वृद्धमान गु.श्रे. बनाती है, तो
 (A) $a = 3, b = 12$ (B) $a = 12, b = 3$ (C) $a = 2, b = 32$ (D) $a = 4, b = 16$
14. संख्या $2.\overline{357}$ के बराबर तथा दशमलब के बाद पुनरारवत होने वाली परिमेय संख्या है—
 (A) $\frac{2355}{1001}$ (B) $\frac{2379}{997}$ (C) $\frac{2355}{999}$ (D) इनमें से कोई नहीं
15. यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलों का योग, उनके व्युत्क्रम के वर्गों के योगफल के बराबर हो, तो $\frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}$ है—
 (A) स.श्रे. में (B) गु.श्रे. में (C) ह.श्रे. में (D) इनमें से कोई नहीं
16. यदि $3 + \frac{1}{3}(3+d) + \frac{1}{4^2}(3+2d) + \dots + \text{upto } \infty = 8$ हो, तो d का मान है—
 (A) 9 (B) 5 (C) 1 (D) इनमें से कोई नहीं
17. यदि n सम हो, तो श्रेणी $1^2 + 2.2^2 + 3^2 + 2.4^2 + 5^2 + 2.6^2 + \dots$ के प्रथम n पदों का योग $\frac{n(n+1)^2}{2}$ है यदि n विषम हो, तो योग है—
 (A) $\frac{n(n+1)^2}{4}$ (B) $\frac{n^2(n+2)}{4}$ (C) $\frac{n^2(n+1)}{2}$ (D) $\frac{n(n+2)^2}{4}$
18. यदि तीन धनात्मक संख्याओं a, b, c का समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य एवं हरात्मक माध्य क्रमशः A, G एवं H हो, तो वह समीकरण जिसके मूल a, b, c है होगी—
 (A) $a^3 - 3Ax^2 + 3G^3x - G^3 = 0$ (B) $x^3 - 3Ax^2 + 3(G^3/H)x - G^3 = 0$
 (C) $x^3 + 3Ax^2 + 3(G^3/H)x - G^3 = 0$ (D) $x^3 - 3Ax^2 - 3(G^3/H)x + G^3 = 0$
19. यदि $a^x = b^y = c^z = d^t$ और a, b, c, d गु.श्रे. में हो, तो x, y, z, t है —
 (A) स.श्रे. में (B) ग.श्रे. में (C) ह.श्रे. में (D) इनमें से कोई नहीं
20. $\sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r^2 - 1}$ का मान है—
 (A) 1 (B) $3/4$ (C) $4/3$ (D) इनमें से कोई नहीं

एक से अधिक विकल्प सही

21. समान्तर श्रेणी $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, के लिए निम्न में से सत्य सम्बन्ध है—

- (A) $a_1 + 2a_2 + a_3 = 0$ (B) $a_1 - 2a_2 + a_3 = 0$
 (C) $a_1 + 3a_2 - 3a_3 - a_4 = 0$ (D) $a_1 - 4a_2 + 6a_3 - 4a_4 + a_5 = 0$
22. यदि अनन्त गु.श्रे. $p, 1, \frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \frac{1}{p^3}, \dots$ का योगफल $\frac{9}{2}$ हो, तो p का मान है—
 (A) 3 (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) इनमें से कोई नहीं
23. यदि धनात्मक संख्याएँ a, b, c स.श्रे. में हो और a^2, b^2, c^2 ह.श्रे. में हो तो—
 (A) $a = b = c$ (B) $2b = a + c$ (C) $b^2 = \sqrt{\frac{ac}{8}}$ (D) इनमें से कोई नहीं
24. यदि $0 < \phi < \pi/2$ के लिए $x = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n}\phi$, $y = \sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2n}\phi$, $z = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n}\phi \sin^{2n}\phi$ हो, तो सही विकल्प है—
 (A) $xyz = xz + y$ (B) $xyz = xy + z$ (C) $xyz = x + y + z$ (D) $xyz = yz + x$
25. यदि दो धनात्मक संख्याओं a एवं b ($a > b$) का समान्तर माध्य उनके गुणोत्तर माध्य का दुगुना हो, तो $a : b$ है —
 (A) $2 + \sqrt{3} : 2 - \sqrt{3}$ (B) $7 + 4\sqrt{3} : 1$ (C) $1 : 7 - 4\sqrt{3}$ (D) $2 : \sqrt{3}$
26. यदि $\sum_{r=1}^r r(r+1)(2r+3) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$ हो, तो—
 (A) $a + c = b + d$ (B) $e = 0$
 (C) $a, b - 2/3, c - 1$ स.श्रे. में है। (D) c/a एक पूर्णांक है।

.....
1-B (विषयात्मक प्रश्न)

1. एक समान्तर श्रेणी का तृतीय पद प्रथम पद का चार गुना है और 6 वाँ पद 17 है। श्रेणी ज्ञात कीजिए।
2. स.श्रे. का तीसरा पद 18 है और 7 वाँ पद 30 है। श्रेणी के 17 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।
3. श्रेणी $-9, -6, -3, \dots$ में कितने पद लेने चाहिए ताकि उनका योगफल 66 हो।
4. 100 एवं 1000 के बीच पूर्णांक संख्याओं की संख्या ज्ञात कीजिए जाकि —
 (i) 7 से विभाजित है। (ii) 7 से विभाजित नहीं है।
5. 100 से 800 के बीच उन सभी पूर्णाकों का योगफल ज्ञात कीजिए, जिन्हें 16 से विभाजित करने पर शेषफल 7 प्राप्त होता है।
6. उस श्रेणी के 35 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका p वाँ पद $\frac{p}{7} + 2$ है।
7. समान्तर श्रेणी की तीन संख्याओं का योगफल 27 है और उनका गुणनफल 504 है, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
8. यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में हो, तो सिद्ध कीजिए कि
 (i) $a^2(b+c), b^2(c+a), c^2(a+b)$ समान्तर श्रेणी में है।
 (ii) $b+c-a, c+a-b, a+b-c$ समान्तर श्रेणी में है।
9. एक गु.श्रे. का तीसरा पद, प्रथम पद का वर्ग है। यदि द्वितीय पद 8 हो, तो 6 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

10. एक गु.श्रे. के तीन लगातार पदों का गुणनफल 216 है, और उनके युग्मों के गुणनफल का योग 156 है, संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
11. यदि गु.श्रे. के p वाँ, q वाँ, r वाँ पद क्रमशः a, b, c है, तो सिद्ध कीजिए कि $a^{q-r} b^{r-p} c^{p-q} = 1$.
12. एक समान्तर श्रेणी के तीन क्रमागत पदों का योगफल 21 है। यदि द्वितीय संख्या में से एक कम किया जाए और तृतीय संख्या को एक बढ़ाया जाए, तो गु.श्रे. के तीन क्रमागत पद प्राप्त होते हैं, संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
13. यदि एक स.श्रे. का p वाँ, q वाँ एवं r वाँ पद गु.श्रे. में हो, तो गु.श्रे. का सार्वअनुपात ज्ञात कीजिए।
14. एक अन्त पद वाली गु.श्रे. के पदों का योग 4 है, और उनके घनों का योग 192 है, तो श्रेणी ज्ञात कीजिए।
15. यदि a, b, c, d गु.श्रे. में हो, तो सिद्ध कीजिए कि :
 (i) $(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - d^2)$ गुणोत्तर श्रेणी में है।
 (ii) $\frac{1}{a^2 + b^2}, \frac{1}{b^2 + c^2}, \frac{1}{c^2 + d^2}$ गुणोत्तर श्रेणी में है।
16. निम्नलिखित श्रेणियों का योगफल ज्ञात कीजिए –
 (i) $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots n$ पदों तक
 (ii) $1 + \frac{3}{4} + \frac{7}{16} + \frac{15}{64} + \frac{31}{256} + \dots$ अनन्त पदों तक
17. एक श्रेणी के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका r वाँ पद $(2r + 1)2^r$ है।
18. एक ह.श्रे. का चौथा पद ज्ञात कीजिए जिसका 7 वाँ पद $\frac{1}{20}$ है और 13 वाँ पद $\frac{1}{38}$ है।
19. दो संख्याओं का समान्तर माध्य 6 हैं एवं उनका गुणोत्तर माध्य G तथा हरात्मक माध्य H सम्बन्ध $G^2 + 3H = 48$ को संतुष्ट करते हो, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
20. यदि दो संख्याओं के मध्य दो समानात् माध्य A_1, A_2 और गुणोत्तर माध्य G_1, G_2 और दो हरात्मक माध्य H_1, H_2 प्रविष्ट कराये जाते हैं तो सिद्ध कीजिए कि $G_1 G_2 : H_1 H_2 = A_1 + A_2 : H_1 + H_2$.
21. सम्बन्ध $A.M. \geq G.M.$ का उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि—
 (i) $\tan \theta + \cot \theta \geq 2$; यदि $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
 (ii) $(x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2) \geq 9x^2y^2z^2$. (x, y, z धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं।)
 (iii) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq abc$; यदि a, b, c धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हो।
23. श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए जिसका n वाँ पद है—
 (i) $n(n + 2)$ (ii) $3^n - 2^n$
24. अनुक्रम के n -पदों का योग ज्ञात कीजिए –
 (i) $1 + 5 + 13 + 29 + 61 + \dots n$ पदों तक
 (ii) $3 + 33 + 333 + 3333 + \dots n$ पदों तक
25. श्रेणी के n -पदों का योग ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} + \dots$

(ii) $1 \cdot 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3^2 + 3 \cdot 5 \cdot 4^2 + \dots$

Exercise - 2

2-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. यदि $x_i > 0, i = 1, 2, \dots, 50$ और $x_1 + x_2 + \dots + x_{50} = 50$ हो, तो $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{50}}$ का न्यूनतम मान है—
 (A) 50 (B) $(50)^2$ (C) $(50)^3$ (D) $(50)^4$
2. यदि $a, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}, b$ स.श्रे. में है और $a, g_1, g_2, g_3, \dots, g_{2n}, b$ ग.श्रे. में है तथा a एवं b का हरात्मक माध्य h हो, तो $\frac{a_1 + a_{2n}}{g_1 g_{2n}} + \frac{a_2 + a_{2n-1}}{g_2 g_{2n-1}} + \dots + \frac{a_n + a_{n+1}}{g_n g_{n+1}}$ का मान है—
 (A) $\frac{2n}{h}$ (B) $2nh$ (C) nh (D) $\frac{n}{h}$
3. एक समबाहु त्रिभुज की एक भुजा 24 सेमी. है। इसकी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से अन्य त्रिभुज बनता है जिसके मध्य बिन्दुओं को पुनः मिलाने पर किसी अन्य त्रिभुज का निर्माण होता है। यह क्रम अनन्त तक चलता हो, तो सभी त्रिभुजों के परिमापों का योगफल है—
 (A) 144 सेमी. (B) 212 सेमी. (C) 288 सेमी. (D) इनमें से कोई नहीं
4. यदि एक गु.श्रे. (सार्व अनुपात r) के p वे पद से प्रारम्भ होने वाले n पदों का योगफल, उसी श्रेणी के q में पद से प्रारम्भ होने वाले समान पदों के योग का k गुना हो, तो k का मान है—
 (A) $r^{p/q}$ (B) $r^{q/p}$ (C) $r^{p \cdot q}$ (D) r^{p+q}
5. यदि a और b के मध्य दो समान्तर माध्य A_1, A_2 और दो गुणोत्तर माध्य G_1, G_2 हो तो $\frac{A_1 + A_2}{G_1 G_2}$ का मान है—
 (A) $\frac{a+b}{2ab}$ (B) $\frac{2ab}{a+b}$ (C) $\frac{a+b}{ab}$ (D) $\frac{a+b}{\sqrt{ab}}$
6. किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a एवं b के मध्य समान्तर माध्य एवं गुणोत्तर माध्य क्रमशः P एवं Q हो, तो $P - Q$ का मान है—
 (A) $\frac{a-b}{a}$ (B) $\frac{a+b}{2}$ (C) $\frac{2ab}{a+b}$ (D) $\left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{2}}\right)^2$
7. धनात्मक पदों वाली एक गु.श्रे. का प्रत्येक पद इसके अगले दो पदों के योग के बराबर है, गु.श्रे. का सार्व अनुपात है—
 (A) $2 \cos 18^\circ$ (B) $\sin 18^\circ$ (C) $\cos 18^\circ$ (D) $2 \sin 18^\circ$
8. यदि $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ हो, तो $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots =$
 (A) $\pi^2 / 12$ (B) $\pi^2 / 24$ (C) $\pi^2 / 8$ (D) इनमें से कोई नहीं
9. यदि a_1, a_2, \dots, a_n स.श्रे. (सार्वअन्तर $d \neq 0$) में हो, तो श्रेणी $(\sin d) [\operatorname{cosec} a_1 \operatorname{cosec} a_2 + \operatorname{cosec} a_2 \operatorname{cosec} a_3 + \dots + \operatorname{cosec} a_{n-1} \operatorname{cosec} a_n]$ का योगफल है—

- (A) $\sec a_1 - \sec a_n$ (B) $\operatorname{cosec} a_1 - \operatorname{cosec} a_n$
 (C) $\cot a_1 - \cot a_n$ (D) $\tan a_1 - \tan a_n$
10. श्रेणी $S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots - 2002^2 + 2003^2$ का योगफल है—
 (A) 2007006 (B) 1005004 (C) 2000506 (D) इनमें से कोई नहीं
11. यदि $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ हो तो $1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{3} + \dots + \frac{2n-1}{n}$ का मान है—
 (A) $2n - H_n$ (B) $2n + H_n$ (C) $H_n - 2n$ (D) $H_n + n$
12. यदि S_1, S_2, S_3 क्रमशः प्रथम n प्राकृत संख्याओं का, उनके वर्गों का और उनके घनों का योगफल, हो, तो $\frac{S_3(1+8S_1)}{S_2^2}$ का मान है—
 (A) 1 (B) 3 (C) 9 (D) 10

एक से अधिक विकल्प सही

13. किसी समकोण त्रिभुज की भुजाएँ गु.श्रे. में हों, तो सबसे छोटे कोण की स्पर्शज्या है—
 (A) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ (B) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ (C) $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}+1}}$ (D) $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}$
14. यदि b_1, b_2, b_3 ($b_i > 0$) एक गु.श्रे. (सार्वअनुपात r) के तीन क्रमागत पद हों, तो असमिका $b_3 > 4b_2 - 3b_1$ को संतुष्ट करने वाला r का मान है —
 (A) $r > 3$ (B) $0 < r < 1$ (C) $r = 3.5$ (D) $r = 5.2$

2-B (विषयात्मक प्रश्न)

1. एक स.श्रे. के प्रथम 10 पदों का योगफल 155 है और एक गु.श्रे. के प्रथम 2 पदों का योग 9 है। स.श्रे. का प्रथम पद, गु.श्रे. के सार्वअनुपात के बराबर है और गु.श्रे. का प्रथम पद, स.श्रे. के सार्वअन्तर के बराबर है। दोनों श्रेणियाँ ज्ञात कीजिए।
2. निम्न अनुक्रमों के n वें समूह का योगफल ज्ञात कीजिए
 (i) 1, (2, 3); (4, 5, 6, 7); (8, 9,, 15);
- (ii) (1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9),
3. श्रेणी $\frac{5}{13} + \frac{55}{(13)^2} + \frac{555}{(13)^3} + \frac{5555}{(13)^4} + \dots$ के अनन्त पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।
4. यदि $0 < x < \pi$ और व्यंजक $\exp \{ \{1 + |\cos x| + \cos^2 x + |\cos^3 x| + \cos^4 x + \dots \text{upto } \infty\} \log_e 4 \}$ द्विघात समीकरण $y^2 - 20y + 64 = 0$ को संतुष्ट करता हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।
5. प्रदर्शित कीजिए कि $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ किसी स.श्रे. के पद नहीं हो सकते हैं।
6. R त्रिज्या के वृत्त में एक वर्ग बनाया जाता है और पुनः उस वर्ग के अन्दर एक वृत्त बनाया जाता है एवं वृत्त के अन्दर एक नया वर्ग तथा यह क्रम n बार चलता है, तो सभी वृत्तों के क्षेत्रफलों के योगफल तथा सभी वर्गों के क्षेत्रफलों के योगफल की सीमा $n \rightarrow \infty$ पर ज्ञात कीजिए।

7. यदि α, γ समीकरण $Ax^2 - 4x + 1 = 0$ के मूल तथा β, δ समीकरण $Bx^2 - 6x + 1 = 0$ के मूल हो, तो A तथा B के मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए α, β, γ एवं ह.श्रे. में है।
8. यदि a, b, c धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हो, तो सिद्ध कीजिए कि—
 $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 > abc(a + b + c)$
9. निम्नलिखित श्रेणियों के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए :
- (i) $\sum_{r=1}^n r(r+1)(r+2)(r+3)$
- (ii) $\frac{n}{1.2.3} + \frac{n-1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
10. निम्नलिखित श्रेणियों का योगफल ज्ञात कीजिए :
- (i) $1^2 - \frac{2^2}{5} + \frac{3^3}{5^2} - \frac{4^2}{5^3} + \frac{5^2}{5^4} - \frac{6^2}{5^5} + \dots \infty$,
- (ii) $\frac{1}{1+1^2+1^4} + \frac{2}{1+2^2+2^4} + \frac{3}{1+3^2+3^4} + \dots \infty$
11. यदि a, b, c धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं और एक त्रिभुज की भुजाएँ हो, तो सिद्ध कीजिए कि
 $(a + b + c)^3 > 27(a + b - c)(c + a - b)(b + c - a)$
12. यदि किसी समान्तर श्रेणी के m पदों का योग, उसके n पदों तथा उसके बाद आने वाले p पदों के योगफल के बराबर हो तो सिद्ध कीजिए कि $(m + n) \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p} \right) = (m + p) \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right)$.

Exercise - 3

3-A (स्तम्भ मिलान)

- | 1. स्तम्भ -I | स्तम्भ -II |
|--|------------|
| (A) यदि $\log_5 2, \log_5(2^x - 5)$ तथा $\log_5(2^x - 7/2)$ स.श्रे. में हो, तो $2x$ का मान है— | (p) 6 |
| (B) माना कि S_n स.श्रे. के प्रथम n पदों के योग को बताता है, यदि $S_{2n} = 3S_n$ हो तो $\frac{S_{3n}}{S_n}$ है— | (q) 9 |
| (C) अनन्त श्रेणी $4 + \frac{8}{3} + \frac{12}{3^2} + \frac{16}{3^3} + \dots$ का योग है— | (r) 3 |
| (D) एक आयताकार बाक्स की लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई गु.श्रे. में है तथा आयतन 27 | (s) 1 |

एवं सतही क्षेत्रफल 78 है, तो इसकी लम्बाई है—

- | 2. स्तम्भ - I | स्तम्भ -II |
|---|------------|
| (A) यदि $\log_x y, \log_2 x \log_y z$ गु.श्रे. में हो, $xyz = 64$ तथा x^3, y^3, z^3 सा.श्रे. में है तो $\frac{3x}{y} =$ | (p) 2 |
| (B) $2^{\frac{1}{4}} \cdot 4^{\frac{1}{8}} \cdot 8^{\frac{1}{16}} - - - - \infty =$ | (q) 1 |
| (C) यदि x, y, z स.श्रे. में हैं, तो $(x + 2y - z)(2y + z - x)(z + x - y) = kxyz$, | (r) 3 |
| (D) 1 तथा 31 के मध्य m समान्तर माध्य प्रविष्ट कराये जाते हैं यदि 7 वें माध्य | (s) 4 |

तथा $(m - 1)$ वें माध्य का अनुपात $5 : 9$ हो, तो $\frac{m}{7} =$

.....
3-B (कथन/कारण)

3. **कथन 1** : श्रेणी जिसके लिए n पदों का योग $S_n = 5n^2 + 6n$ से दिया जाता है एक समान्तर श्रेणी है।
कथन 2 : एक समान्तर श्रेणी के n पदों का योग जो अशून्य सार्वअन्तर रखती है n में एक द्विघातीय व्यंजक $an^2 + bn$ होता है।
 (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।
4. **कथन - 1** : 1, 2, 4, 8, एक गुणोत्तर श्रेणी है, 4, 8, 16, 32 एक गुणोत्तर श्रेणी है और $1 + 4, 2 + 8, 4 + 16, 8 + 32, \dots$ भी एक गुणोत्तर श्रेणी है।
कथन - 2 : माना कि r सार्व अनुपात वाली एक गुणोत्तर श्रेणी का व्यापक पद T_{k+1} है और r सार्व अनुपात वाली एक अन्य गुणोत्तर श्रेणी का व्यापक पद T'_{k+1} है, तो श्रेणी जिसका व्यापक पद $T''_{k+1} = T_{k+1} + T'_{k+1}$ है भी एक गुणोत्तर श्रेणी है जिसका सार्व अनुपात r है।
 (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।
5. **कथन -1** : अनुक्रम 1,2,4,7,11,16,22----- के प्रथम 30 पदों का योग 4520 है।
कथन -2 : यदि किसी अनुक्रम के क्रमागत पदों के अन्तर एक समान्तर श्रेणी बनाते हैं, तो इस अनुक्रम का व्यापक पद $an^2 + bn + c$ होता है।
 (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।
6. **कथन-1** : यदि 3,6,12 गु.श्रे. में हो, तो 9,12,18 ह.श्रे. में होंगे।
कथन -2 : यदि किस गु.श्रे. के तीन क्रमागत पदों के मध्य पद को जोड़ा जाए, तो परिणामी अनुक्रम एक ह.श्रे. होगी।
 (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

3-C (अनुच्छेद)

7. अनुच्छेद

$$\text{हम जाते हैं कि } 1 + 2 + 3 + \dots = \frac{n(n+1)}{2} = f(n),$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = g(n),$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = h(n)$$

7.1 निश्चित रूप से $g(n) - g(n-1) =$

- (A) n^2 (B) $(n-1)^2$ (C) $n-1$ (D) n^3

7.2 प्रत्येक $n \geq 2$ के लिए $g(n) - f(n)$ को विभाजित करने वाली अधिकतम सम प्राकृत संख्या है—

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) इनमें से कोई नहीं

7.3 $f(n) + 3g(n) + h(n)$, $1 + 2 + 3 + \dots + n$ से विभाजित है—

- (A) केवल यदि $n = 1$ (B) केवल यदि n विषम है। (C) केवल यदि n सम है (D) सभी $n \in \mathbb{N}$ के लिए

8. अनुच्छेद

$(4n+1)$ पदों कि एक अनुक्रम में प्रथम $(2n+1)$ पद स.श्रे. में है जिसका सार्वअन्तर 2 है, तथा अंतिम $(2n+1)$ पद गु.श्रे. में है जिसका सार्वअनुपात 0.5 है, यदि स.श्रे. तथा गु.श्रे. के मध्य पद समान हो, तो

8.1 अनुक्रम का मध्य पद है—

- (A) $\frac{n \cdot 2^{n+1}}{2^n - 1}$ (B) $\frac{n \cdot 2^{n+1}}{2^{2n} - 1}$ (C) $n \cdot 2^n$ (D) इनमें से कोई नहीं

8.2 अनुक्रम का प्रथम पद है—

- (A) $\frac{4n + 2n \cdot 2^n}{2^n - 1}$ (B) $\frac{4n - 2n \cdot 2^n}{2^n - 1}$ (C) $\frac{2n - n \cdot 2^n}{2^n - 1}$ (D) $\frac{2n + n \cdot 2^n}{2^n - 1}$

8.3 गु.श्रे. का मध्य पद है—

- (A) $\frac{2^n}{2^n - 1}$ (B) $\frac{n \cdot 2^n}{2^n - 1}$ (C) $\frac{n}{2^n - 1}$ (D) $\frac{2n}{2^n - 1}$

3-D (सत्य/असत्य कथन)

9. समान संख्याएँ सदैव समान्तर श्रेणी, गुणोत्तर श्रेणी तथा हरात्मक श्रेणी में होती हैं।

10. यदि $x > 1$ और $\left(\frac{1}{x}\right)^a, \left(\frac{1}{x}\right)^b, \left(\frac{1}{x}\right)^c$ गु.श्रे. में हो तो, a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं।

11. यदि a, b, c ह.श्रे. में हो तो $a - \frac{b}{2}, \frac{b}{2}, c - \frac{b}{2}$ समान्तर श्रेढ़ी में है—
12. यदि $\frac{a + be^y}{a - be^y} = \frac{b + ce^y}{b - ce^y} = \frac{c + de^y}{c - de^y}$ हो, तो a, b, c, d ह.श्रे. में है
13. यदि $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ स.श्रे. में हो, तो $g^{bx+1}, g^{cx+1}, g^{ax+1}, x \neq 0$ ग.श्रे. में है।

.....
3-E (रिक्त स्थान की पूर्ति)

14. श्रेणी $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{15}{16} + \dots$ के n पदों का योगफल _____ है।
15. यदि t_n श्रेण $2 + 3 + 6 + 11 + 18 + \dots$ के n वें पद को प्रदर्शित करता है, तो t_{50} _____ है।
16. यदि $S_n = n^2a + \frac{n}{4}(n-1)d$ स.श्रे. के प्रथम n पदों का योगफल हो, तो सार्वान्तर _____ है।
17. यदि $x > 0$ हो, तो व्यंजक $\frac{x^{100}}{1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{200}}$ सदैव _____ से छोटा या उसके बराबर होगा।
18. यदि दो धनात्मक संख्याओं के मध्य G_1 तथा G_2 दो गु.मा. तथा A एक स.मा. हो, तो $\frac{G_1^2}{G_2} + \frac{G_2^2}{G_1}$ का मान _____ है।

Exercise - 4

.....
4-A (पूर्ववर्ती JEE परीक्षा प्रश्न)

IIT - JEE - 2008

1. माना चार भिन्न धनात्मक संख्याएँ a_1, a_2, a_3, a_4 गुणात्मक श्रेणी (GP) में है। माना
 $b_1 = a_1, b_2 = b_1 + a_2, b_3 = b_2 + a_3$ और $b_4 = b_3 + a_4$
कथन -1 : संख्याएँ b_1, b_2, b_3, b_4 न तो समान्तर श्रेणी A.P. में हैं और न ही गुणात्मक श्रेणी G.P. में है।
और
कथन - 2 : संख्याएँ b_1, b_2, b_3, b_4 हरात्मक श्रेणी (HP) में है।
 (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।

(D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

IIT - JEE - 2007

2. अनुच्छेद

माना V_r एक समान्तर श्रेणी के प्रथम r पदों के योग को प्रदर्शित करता है जिसका प्रथम पद r है और सार्वअन्तर $(2r - 1)$ है।
 माना $T_r = V_{r+1} - V_r - 2$ और $Q_r = T_{r+1} - T_r$ $r = 1, 2, \dots$ पर

2.1 $V_1 + V_2 + \dots + V_n$ का योग है -

- (A) $\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2 - n + 1)$ (B) $\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2 + n + 2)$
 (C) $\frac{1}{2}n(2n^2 - n + 1)$ (D) $\frac{1}{3}(2n^3 - 2n + 3)$

2.2 T_r हमेशा है-

- (A) एक विषम संख्या (B) एक सम संख्या
 (C) एक अभाज्य संख्या (D) संयुक्त संख्या

2.3 निम्न में से कौनसे कथन सत्य है-

- (A) Q_1, A_2, Q_3, \dots स.श्रे. में है जिसका सार्वअन्तर 5 है।
 (B) Q_1, Q_2, Q_3, \dots स.श्रे. में है जिसका सार्वअन्तर 6 है।
 (C) Q_1, Q_2, Q_3, \dots स.श्रे. में है जिसका सार्वअन्तर 11 है।

3. अनुच्छेद

माना A_1, G_1, H_1 किसी दो धनात्मक भिन्न-भिन्न संख्या के समान्तर, गुणोत्तर और हरात्मक माध्य को प्रदर्शित करते हैं। जहाँ $n \geq 2$, माना A_n, G_n, H_n क्रमशः A_{n-1} और H_{n-1} के समान्तर, गुणोत्तर और हरात्मक माध्य है।

3.1 निम्न में से कौनसा कथन सत्य है-

- (A) $G_1 > G_2 > G_3 > \dots$ (B) $G_1 < G_2 < G_3 < \dots$
 (C) $G_1 = G_3 = G_5 > \dots$ (D) $G_1 < G_3 < G_5 < \dots$ तथा $G_2 > G_4 > G_6 > \dots$

3.2 निम्न में से कौन कथन सत्य है-

- (A) $A_1 > A_2 > A_3 > \dots$ (B) $A_1 < A_2 < A_3 < \dots$
 (C) $A_1 > A_3 > A_5 > \dots$ तथा $A_2 < A_4 < A_6 < \dots$ (D) $A_1 < A_3 < A_5 < \dots$ तथा $A_2 > A_4 > A_6 > \dots$

3.3 निम्न में से कौनसा कथन सत्य है -

- (A) $H_2 > H_3 > H_4 > \dots$ (B) $H_1 < H_2 < H_3 < \dots$
 (C) $H_1 > H_3 > H_5 > \dots$ तथा $H_2 < H_4 < H_6 < \dots$ (D) $H_1 < H_3 < H_5 < \dots$ तथा $H_2 > H_4 > H_6 > \dots$

IIT - JEE - 2006

4. यदि $a_n = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots + (-1)^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ और $b_n = 1 - a_n$ हो, तो न्यूनतम प्राकृत संख्या n_0 ज्ञात कीजिए

जिसके लिए $b_n > a_n \forall n > n_0$ है।

IIT - JEE - 2005

5. किसी द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ में $\Delta = b^2 - 4ac$ और $\alpha + \beta, a^2 + \beta^2, \alpha^2 + \beta^3$ गु.श्रे. में है। जहाँ α, β समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हों, तो
 (A) $\Delta \neq 0$ (B) $b\Delta = 0$ (C) $c\Delta = 0$ (D) $\Delta = 0$

IIT - JEE - 2004

6. यदि अनन्त पदों वाली गु.श्रे. का प्रथम पद x और अनन्त पदों का योग 5 हो, तो 'x' के मानों का परिसर है—
 (A) $X \leq -10$ (B) $x \geq 10$ (C) $0 < x < 10$ (D) $-10 \leq x \leq 10$

IIT - JEE - 2003

7. यदि $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ हो, तो $\sqrt{x^2 + x} + \frac{\tan^2 \alpha}{\sqrt{x^2 + x}}$ का न्यूनतम मान है—
 (A) $2 \tan \alpha$ (B) 1 (C) 2 (D) $\sec^2 \alpha$
8. यदि a, b, c स.श्रे. में है और a^2, b^2, c^2 ह.श्रे. में हो, तो सिद्ध कीजिए कि या तो $a = b = c$ या $a, b, -\frac{c}{2}$ गु.श्रे. में है।

IIT - JEE - 2002

9. यदि $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं, जिनका गुणनफल एक स्थिर संख्या c है, तो $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + 2a_n$ का न्यूनतम मान है—
 (A) $n(2c)^{1/n}$ (B) $(n+1)c^{1/n}$ (C) $2nc^{1/n}$ (D) $(n+1)(2c)^{1/n}$
10. माना a, b, c स.श्रे. में है और a^2, b^2, c^2 गु.श्रे. में है। यदि $a < b < c$ और $a + b + c = \frac{3}{2}$ हो, तो a का मान है —
 (A) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (C) $\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$
11. माना कि a, b धनात्मक वास्तविक संख्याएँ तथा यदि a, A_1, A_2, b स.श्रे. में a, G_1, G_2, b गु.श्रे. में और a, H_1, H_2, b ह.श्रे. में हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि —

$$\frac{G_1 G_2}{H_1 H_2} = \frac{A_1 + A_2}{H_1 + H_2} = \frac{(2a)(a+2b)}{9ab}$$

IIT - JEE - 2001

12. यदि समीकरण $a^2 - x + p = 0$ के मूल α, β हैं और समीकरण $x^2 + 4x + q = 0$ के मूल γ, δ हैं। यदि $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ गु.श्रे. में हो, तो p तथा q के पूर्णांक मान क्रमशः हैं—
 (A) -2, -32 (B) -2, 3 (C) -6, 3 (D) -6, -32
13. यदि स.श्रे. 2, 5, 8, के प्रथम $2n$ पदों का योग स.श्रे. 57, 59, 61, के प्रथम n पदों के योगफल के बराबर हो, तो n का मान है—
 (A) 10 (B) 12 (C) 11 (D) 13

14. यदि धनात्मक संख्याएँ a, b, c, d स.श्रे. में हो, तो abc, abd, acd, bcd किस श्रेणी में है—
 (A) स.श्रे./गु.श्रे./ह.श्रे. में नहीं है। (B) स.श्रे. में है।
 (C) गु.श्रे. में है। (D) ह.श्रे. में है।
15. माना कि धनात्मक वास्तविक संख्याएँ a_1, a_2, \dots, a_n गु.श्रे. में हैं। यदि a_1, a_2, \dots, a_n का समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य, हरात्मक माध्य क्रमशः A_n, G_n, H_n हो, तो प्रत्येक n के लिए क्रमशः AM, GM, HM हैं, तो G_1, G_2, \dots, G_n के गुणोत्तर माध्य के लिए $A_1, A_2, \dots, A_n, H_1, H_2, \dots, H_n$ के पदों में व्यंजक ज्ञात कीजिए।

IIT - JEE - 2000

16. यदि a, b, c, d धनात्मक वास्तविक संख्याएँ इस प्रकार हैं कि $a + b + c + d = 2$ हो, तो $M = (a + b)(c + d)$ किस सम्बन्ध को संतुष्ट करता है—
 (A) $0 \leq M \leq 1$ (B) $1 \leq M \leq 2$ (C) $2 \leq M \leq 3$ (D) $3 \leq M \leq 4$
17. एक अनन्त गु.श्रे. प्रथम पद a एवं सार्व अनुपात r है। यदि योग 4 हो व द्वितीय पद $3/4$ हो, तो —
 (A) $a = \frac{7}{4}, r = \frac{3}{7}$ (B) $a = 2, r = \frac{3}{8}$ (C) $a = \frac{3}{2}, r = \frac{1}{2}$ (D) $a = 3, r = \frac{1}{4}$
18. पूर्णांक पदों वाली समान्तर श्रेणी के सार्वान्तर की चतुर्थ घात को किन्हीं चार क्रमागत पदों के गुणनफल में जोड़ा जाता हो, तो सिद्ध कीजिए कि यह योग एक पूर्णांक का वर्ग है।

IIT-JEE-1999

19. यदि x_1, x_2, x_3 और y_1, y_2, y_3 गु.श्रे. जिनका सार्वानुपात समान है, में हो, तो बिन्दु $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ और (x_3, y_3)
 (A) सरल रेखा पर स्थित है। (B) दीर्घवृत्त पर स्थित है।
 (C) वृत्त पर स्थित है। (D) त्रिभुज के शीर्ष हैं।
20. माना a_1, a_2, \dots, a_{10} स.श्रे. में और h_1, h_2, \dots, h_{10} ह.श्रे. में है। यदि $a_1 = h_1 = 2$ और $a_{10} = h_{10} = 3$ हो, तो $a_4 h_7$ का मान है—
 (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 6
21. किसी धनात्मक पूर्णांक n के लिए यदि $a(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{(2^n) - 1}$ हो तो,
 (A) $a(100) \leq 100$ (B) $a(100) > 100$ (C) $a(200) \leq 100$ (D) $a(200) > 100$
22. माना कि वर्ग S_1, S_2, \dots इस प्रकार हैं कि प्रत्येक $n \geq 1$ के लिए वर्ग S_n की भुजा की लम्बाई वर्ग S_{n+1} के विकर्ण की लम्बाई के बराबर है। यदि S_1 की भुजा की लम्बाई 10 सेमी हो, तो निम्नलिखित में से n के किस मान के लिए S_n का क्षेत्रफल 1 वर्ग सेमी से कम है ?
 (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10
23. समीकरण $(5 + \sqrt{2})x^2 - (4 + \sqrt{5})x + 8 + 2\sqrt{5} = 0$ के मूलों का हरात्मक माध्य है—
 (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

24. यदि $x = 1, y > 1, z > 1$ गु.श्रे. में हो, तो $\frac{1}{1 + \ln x}, \frac{1}{1 + \ln z}, \frac{1}{1 + \ln z}$ किस श्रेणी में है—
 (A) स.श्रे. (B) ह.श्रे. (C) गु.श्रे. (D) इनमें से कोई नहीं
25. माना $r = 1, 2, 3, \dots$ के लिए T_r एक स.श्रे. के r वे पद को प्रदर्शित करता है, यदि किन्हीं धनात्मक पूर्णाकों m, n के लिए $T_m = \frac{1}{n}$ और $T_n = \frac{1}{m}$ हो, तो T_{mn} का मान है—
 (A) $\frac{1}{mn}$ (B) $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ (C) 1 (D) 0

IIT - JEE - 1997

26. यदि $\cot(x - y), \cos x$ और $\cos(x + y)$ ह.श्रे. में हो, तो $\cos x \sec\left(\frac{y}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ है।
27. माना समीकरण $x^2 - 2x + A = 0$ के मूल p एवं p है और समीकरण $x^2 - 18x + B = 0$ के मूल r एवं s है। यदि $p > q > r < s$ स.श्रे. में हो, तो $A = \underline{\hspace{2cm}}$ और $B = \underline{\hspace{2cm}}$ है।
28. दो धनात्मक संख्याओं के मध्य समान्तर माध्य x एवं दो गुणोत्तर माध्य y, z हो, तो $\frac{y^3 + z^3}{xyz}$ का मान $\underline{\hspace{2cm}}$ है।
29. यदि दो संख्याओं p और q के मध्य एक समान्तर माध्य A और गुणोत्तर माध्य p और q प्रविष्ट किए जाए, तो $p^3 + q^3$ का मान है—
 (A) $\frac{2pq}{A}$ (B) $2A pq$ (C) $2A p^2 q^2$ (D) इनमें से कोई नहीं

IIT - JEE - 1996

30. किसी विषम पूर्णांक $n \geq 1$ के लिए $n^3 - (n - 1)^3 + \dots + (-1)^{n-1} 13$ का मान $\underline{\hspace{2cm}}$ है।
31. श्रेणी $\frac{1^3}{1} + \frac{1^3 + 2^3}{1 + 3} + \frac{1^3 + 2^3 + 3^3}{1 + 3 + 5} + \dots$ के 16 के पदों का योगफल है।
 (A) 346 (B) 446 (C) 546 (D) इनमें से कोई नहीं

IIT-JEE-1995

32. यदि $n (> 1)$ कोई धनात्मक पूर्णांक हो, तो महत्तम पूर्णांक m का मान है ताकि $(1 + n + n^2 + \dots + n^{127})$ संख्या $(n^m + 1)$ से विभाजित हो।
 (A) 127 (B) 63 (C) 64 (D) 32

4- B (पूर्ववर्ती AIEEE/DCE परीक्षा प्रश्न)

33. धनात्मक पदों की एक गु.श्रे. में प्रत्येक पद अपने बाद आने वाले दो पदों के योग के बराबर है तो श्रेणी का सार्वअनुपात है—
 (A) $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ (B) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$
34. माना कि a_1, a_2, a_3, \dots स.श्रे. के पद नहीं है यदि $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_p}{a_1 + a_2 + \dots + a_q} = \frac{p^2}{q^2}$, $p \neq q$ हो, तो $\frac{a_6}{a_{21}} =$
 (A) $\frac{7}{2}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{11}{41}$ (D) $\frac{41}{11}$
35. यदि a_1, a_2, \dots, a_n ह.श्रे. में हो, तो व्यंजक $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n =$
 (A) $(n - 1)(a_1 - a_n)$ (B) $na_1 a_n$ (C) $(n - 1) a_1 a_n$ (D) $n(a_1 - a_n)$
36. यदि $x = \sum_{n=0}^{\infty} a^n, y = \sum_{n=0}^{\infty} b^n, z = \sum_{n=0}^{\infty} c^n$ हो, जहाँ a, b, c स.श्रे. में है, तथा $|a| < 1, |b| < 1, |c| < 1$ हो, तो x, y, z है—
 (A) ह.श्रे. में (B) समान्तर्रीय गुणोत्तर श्रेणी में
 (C) स.श्रे. में (D) गु.श्रे. में
37. यदि $S(K) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2K - 1) = 3 + K^2$ हो, तो निम्न में से कौन सत्य है—
 (A) $S(1)$ सत्य है।
 (B) $S(K) \Rightarrow S(K + 1)$
 (C) $S(K) \not\Rightarrow S(K + 1)$
 (D) सूत्र को सिद्ध करने के लिए आगमन सिद्धान्त का उपयोग किया जा सकता है।
38. यदि T_r एक स.श्रे. का r वाँ पद है जिसका प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है, यदि कुछ धनात्मक पूर्णाकों m, n के लिए $m \neq n, T_m = \frac{1}{n}$ तथा $T_n = \frac{1}{m}$ हो, तो $a - d =$
 (A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{mn}$ (D) $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$
39. यदि n सम हो, तो श्रेणी $1^2 + 2.2^2 + 3^2 + 2.4^2 + 5^2 + 2.6^2 + \dots$ के प्रथम n पदों का योग $\frac{n(n+1)^2}{2}$ है यदि n विषम हो, तो योग है—
 (A) $\frac{3n(n+1)}{2}$ (B) $\frac{n^2(n+1)}{2}$ (C) $\frac{n(n+1)^2}{4}$ (D) $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
40. माना कि $f(x)$ द्वितीय घात का एक बहुपद फलन है, यदि $f(1) = f(-1)$ तथा a, b, c समान्तर श्रेणी में हो, तो $f'(a), f'(b)$ तथा $f'(c)$ है
 (A) स.श्रे. में (B) ह.श्रे. में
 (C) गु.श्रे. में (D) समान्तर्रीय गुणोत्तर श्रेणी में

41. यदि x_1, x_2, x_3 तथा y_1, y_2, y_3 दोनों समान सार्वअनुपात वाली गु.श्रे. में है, तो बिन्दु $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ तथा (x_3, y_3)
 (A) सरल रेखा पर स्थित है। (B) दीर्घवृत्त पर स्थित है।
 (C) वृत्त पर स्थित है (D) त्रिभुज के शीर्ष है
42. मानाकि R_1 तथा R_2 क्रमशः एक तिर्यक समतल की उच्च एवं निम्न महत्तम परास है तथा R क्षैतिज समतल की अधिकतम परास है, तो R_1, R_2, R_3 है।
 (A) स.श्रे. में (B) समान्तर्रीय गुणोत्तर श्रेढी में
 (C) गु.श्रे. में (D) ह.श्रे. में
43. मानाकि त्रिभुज के कोण A, B तथा C स.श्रे. में है जिसका सार्वअन्तर 15° है, तो कोण B =
 (A) 30° (B) 75° (C) 60° (D) 45°
44. यदि $x^2 + 9y^2 + 25z^2 = xyz \left(\frac{15}{x} + \frac{5}{y} + \frac{3}{z} \right)$ हो, तो x, y तथा z है -
 (A) स.श्रे. में (B) समान्तर्रीय गुणोत्तर श्रेढी में
 (C) गु.श्रे. में (D) ह.श्रे. में
45. यदि p, q, r गु.श्रे. में तथा $\tan^{-1}p, \tan^{-1}q, \tan^{-1}r$ समान्तर श्रेढी में है, तो p, q, r को संतुष्ट करने वाला सम्बन्ध है।
 (A) $p = q = r$ (B) $p \neq q \neq r$ (C) $p + q = r$ (D) इनमें से कोई नहीं
46. श्रेणी $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \dots$ के n पदों का योगफल है-
 (A) $(n + 1)! - 1$ (B) $(n - 1)! - 1$ (C) $(n - 1)! + 1$ (D) $(n + 1)! - 1$
47. यदि $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ धनात्मक संख्याएँ इस प्रकार है कि $a_1, a_2, \dots, a_n = 1$ तो इनका योग है-
 (A) एक धनात्मक पूर्णांक (B) n से विभाजित
 (C) कभी भी n से छोटा नहीं (D) इनमें से कोई नहीं
48. प्रथम n प्राकृत संख्याओं में से दो-दो को साथ लेकर बनने वाले संभावित गुणनफलों का योगफल है-
 (A) $\frac{1}{24} n(n+1)(n-1)(3n+2)$ (B) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
 (C) $\frac{n(n+1)(2n-1)(n+3)}{24}$ (D) इनमें से कोई नहीं

Answers

EXERCISE # 1- A

1. D 2. D 3. C 4. B 5. A 6. D 7. B
 8. B 9. C 10. B 11. D 12. B 13. C 14. C
 15. C 16. A 17. C 18. B 19. C 20. B
 21. BD 22. AC 23. AB 24. BC 25. ABC

26. ABCD

EXERCISE # 1-B

1. 2,5,8,.... 2. 612 3. 11 4. 128,771
 5. 19668 6. 160 7. 4, 9, 14 9. 128

10. 2,6,18 12. 3,7,11 OR 12,7,213. $\frac{q-r}{p-q}$
 14. 6, -3, 3/2,..... 17. $n \cdot 2^{n+2} - 2^{n+1} + 2$.

18. $\frac{1}{11}$ 19. a = 4, b = 8

23. (i) $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$ (ii) $\frac{1}{2}(3^{n+1} + 1) - 2^{n+1}$

24. (i) $2^{n+2} - 3n - 4$ (ii) $\frac{1}{27}(10^{n+1} - 9n - 10)$

25. (i) $\frac{1}{12} - \frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$
 (ii) $\frac{n}{10}(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)$

EXERCISE # 2 –A

1. A 2. A 3. A 4. C 5. C 6. D 7. D
 8. C 9. C 10. A 11. A 12. C 13. BC
 14. ABCD

EXERCISE # 2 –B

1. $(3 + 6 + 12 + \dots); (2/3 + 25/3 + 625/3 + \dots)$
 2. (i) $2^{n-2}(2^n + 2^{n-1} - 1)$ (ii) $(n-1)^3 + n^3$
 3. $\frac{65}{36}$ 4. $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ 6. $2\pi R^2; 4R^2$
 7. A = 3; B = 8
 9. (i) $(1/5)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$
 (ii) $\frac{n(n+1)}{4(n+2)}$

10. (i) $\frac{25}{24}$ (ii) $\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}; s_\infty = \frac{1}{2}$

EXERCISE # 3

1. (A) → (p), (B) → (p), (C) → (q), (D) → (q)
 2. (A) → (r), (B) → (p), (C) → (s), (D) → (p)
 3. A 4. A 5. D 6. A 7.1 A 7.2 A 7.3 D
 8.1 A 8.2 B 8.3 D 9. False 10. True
 11. False (GP) 12. False (G.P.) 13. True
 14. $2^n + n - 1$ 15. $49^2 + 2$ 16. $2a + \frac{d}{2}$
 17. $\frac{1}{201}$ 18. 2A

EXERCISE # 4

1. C 2.1 B 2.2 D 2.3 B 3.1 C 3.2 A 3.3 B
 4. minimum natural number $n_0 = 6$
 5. C 6. C 7. A 9. A 10. D 12. A 13. C
 14. D 15. $G = \prod_{K=1}^n (A_K H_K)^{\frac{1}{2n}}$ 16. A 17. D 19. A
 20. D 21. AD 22. BCD 23. B 24. B 25. C
 26. $\pm\sqrt{2}$ 27. a = -3, b = 77 28. 2 29. B
 30. $\frac{1}{4}(2n-1)(n+1)^2$ 31. B 32. C 33. D 34. C
 35. C 36. A 37. B 38. A 39. B 40. A 41. A
 42.D43.B44.D45.A46.A47.C48.A

MQB

EXERCISE # 1 (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. श्रेणी $\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{18} + \sqrt{54} + \dots$ के 10 पदों का योगफल है –

- (A) $121(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ (B) $\frac{121}{2}(\sqrt{3} + 1)$ (C) $243(\sqrt{3} + 1)$ (D) $243(\sqrt{3} - 1)$
2. यदि p धनात्मक हो, तो श्रेणी $\frac{1}{1+p} - \frac{1-p}{(1+p)^2} + \frac{(1-p)^2}{(1+p)^3} - \dots$ के अनन्त पदों का योगफल है—
 (A) $1/2$ (B) $3/4$ (C) 1 (D) इनमें से कोई नहीं
3. यदि a, b, c, d धनात्मक वास्तविक संख्याएँ इस प्रकार हैं कि $a + b + c + d = 2$ तो $M = (a + b)(c + d)$ निम्न सम्बन्ध को सन्तुष्ट करता है।
 (A) $0 < M \leq 1$ (B) $1 \leq M \leq 2$ (C) $2 \leq M \leq 3$ (D) $3 \leq M \leq 4$
4. दो धनात्मक संख्याओं a एवं b के मध्य दो गुणोत्तर माध्य G_1 और G_2 तथा एक समान्तर माध्य A हो, तो $\frac{G_1^2}{G_2} + \frac{G_2^2}{G_1}$ का मान है—
 (A) $A/2$ (B) A (C) $2A$ (D) इनमें से कोई नहीं
5. $\{a_n\}$ व $\{b_n\}$ दो अनुक्रम इस प्रकार हैं कि $a_n = (x)^{1/2^n} + (y)^{1/2^n}$ और $b_n = (x)^{1/2^n} - (y)^{1/2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$.
 $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ का मान है —
 (A) $x - y$ (B) $\frac{x+y}{b_n}$ (C) $\frac{x-y}{b_n}$ (D) $\frac{xy}{b_n}$
6. माना a_1, a_2, \dots, a_{10} समान्तर श्रेणी में है और h_1, h_2, \dots, h_{10} हरात्मक श्रेणी में है। यदि $a_1 = h_1 = 2$ और $a_{10} = h_{10} = 3$ तब $a_4 h_7$ है।
 (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 6
7. $2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 4 \times 2^4 + \dots + n \times 2^n = 2^{n+10}$ के लिए धनात्मक पूर्णांक n हैं —
 (A) 510 (B) 511 (C) 512 (D) 513
8. यदि $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2003^2 = (2003)(4007)(334)$ और
 $(1)(2003) + (2)(2002) + (3)(2001) + \dots + (2003)(1) = (2003)(334)(x)$ हो तो $x =$
 (A) 2005 (B) 2004 (C) 2003 (D) 2001
9. यदि $x > 0$ और $\log_2 x + \log_2(\sqrt{x}) + \log_2(\sqrt[4]{x}) + \log_2(\sqrt[8]{x}) + \log_2(\sqrt[16]{x}) + \dots = 4$ हो तो $x =$
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
10. यदि $\sum_{r=1}^n t_r = \frac{1}{12} n(n+1)(b+2)$ हो, तो $\sum_{r=1}^n \frac{1}{t_r}$ का मान है —
 (A) $\frac{2n}{n+1}$ (B) $\frac{2n}{(n+1)}$ (C) $\frac{4n}{n+1}$ (D) $\frac{3n}{n+2}$
11. यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में हैं, p, q, r हरात्मक श्रेणी में हैं और ap, bq, cr गुणोत्तर श्रेणी में हैं तो $\frac{p}{r} + \frac{r}{p} =$

(A) $\frac{a}{c} + \frac{c}{a}$ (B) $\frac{a}{c} - \frac{c}{a}$ (C) $\frac{b}{q} + \frac{q}{b}$ (D) $\frac{b}{q} - \frac{a}{q}$

12. समान्तर श्रेणी जिसके लिये $T_7 = 9$ और $T_1 T_2 T_7$ न्यूनतम है, का सार्वअन्तर है -

(A) $\frac{33}{2}$ (B) $\frac{5}{4}$ (C) $\frac{33}{20}$ (D) इनमें से कोई नहीं

13. दो संख्याओं के मध्य हरात्मक माध्य $\frac{16}{5}$ है, उनका समान्तर माध्य A है और गुणोत्तर माध्य G है। यदि $2A + G^2 = 26$ हो तो संख्याएँ हैं-

(A) 6, 8 (B) 4, 8 (C) 2, 8 (D) 1, 8

14. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = 1015$ हो तो n का मान है -

(A) 15 (B) 14 (C) 13 (D) इनमें से कोई नहीं

15. यदि S_1, S_2, S_3, \dots उन P समान्तर श्रेणियों के प्रथम n पदों के योगफल है जिनके प्रथम पद 1, 2, 3, ... तथा सार्वअन्तर 1, 3, 5, ... हो, तो $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_p =$

(A) $\frac{np(np+1)}{2}$ (B) $\frac{n(np+1)}{2}$ (C) $\frac{np(p+1)}{2}$ (D) $\frac{np(np-1)}{2}$

16. यदि a और b किसी स.श्रे. के p वें और q वें पद है तो उसके (p + q) पदों का योग है -

(A) $\frac{p+q}{2} \left[a-b + \frac{a+b}{p-q} \right]$ (B) $\frac{p+q}{2} \left[a+b + \frac{a-b}{p-q} \right]$
 (C) $\frac{p-q}{2} \left[a+b + \frac{a+b}{p+q} \right]$ (D) इनमें से कोई नहीं

17. यदि किसी श्रेणी के प्रथम दो पद क्रमशः $\log_2 256$ और $\log_3 81$ है तो गलत कथन है-

- (A) यदि तीसरा पद $2 \log_6 1$ है, तो पद स. श्रे. में है।
 (B) यदि तीसरा पद $\frac{2}{3} \log_2 16$ हो तो ये पद ह.श्रे. में है।
 (C) यदि तीसरा पद $\log_4 16$ है तो ये पद गु.श्रे. में है।
 (D) यदि तीसरा पद $\log_2 8$ है तो ये पद स.श्रे. में है।

18. 1 से 100 के मध्य उन पूर्णाकों का योग जो 3 या 5 से विभाजित नहीं है -

(A) 2489 (B) 4735 (C) 2317 (D) 2632

एक सक अधिक विकल्प सही

19. $\sum_{r=1}^n \frac{1}{\sqrt{a+rx} + \sqrt{a+(r-1)x}}$ का मान है -

(A) $\frac{n}{\sqrt{a} + \sqrt{a+nx}}$ (B) $\frac{n}{\sqrt{a} - \sqrt{a+nx}}$ (C) $\frac{\sqrt{a+nx} - \sqrt{a}}{x}$ (D) $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a+nx}}{x}$

20. यदि a, x, b स.श्रे. में है, a, y, b गु.श्रे. में है और a, z, b ह. श्रे. में है यदि $x = y + 2$ और $a = 5z$ हो तो
 (A) $y^2 = xz$ (B) $x > y > z$ (C) $a = 9, b = 1$ (D) $a = 1/4, b = 9/4$

21. यदि $1, \log_y x, \log_z y, -15 \log_x z$ स.श्रे. में है तो –
 (A) $z^3 = x$ (B) $x = y^{-1}$ (C) $z^{-3} = y$ (D) $x = y^{-1} = z^3$

रिक्त स्थानों की पूर्ति करो–

22. एक गु.श्रे. सम संख्या के पद रखती है, यदि सभी पदों का योग उसके विषम पदों के योग का तीन गुना है, तो सार्वअनपात _____ है।
23. यदि a, b, c गु. श्रे. में है, $a - b, c - a, b - c$ ह. श्रे. में है तो $a + 4b + c =$ _____ है।
24. दो अंकों की सभी संख्याओं का योग _____ है, जिसके जब 4 विभाजित किया जाता है तो शेषफल में इकाई प्राप्त होता है।
25. यदि एक स.श्रे. का योग उसके p और p पदों, के लिए बराबर है। तो $(p + q)$ पदों का योग _____ है।

EXERCISE # 2 (विषयात्मक प्रश्न)

1. एक स.श्रे. जिसका प्रथम 'a' है, यदि प्रथम 'p' पदों का योग शून्य के बराबर है, तो प्रदर्शित कीजिए कि अगले 'q' पदों का योग $-\frac{a(p+q)q}{p-1}$ होगा।
2. एक स.श्रे. में पदों की संख्या सम है, विषम पदों का योग 24 और सम पदों का योग 30 है और अंतिम पद प्रथम पद से $10\frac{1}{2}$ से ज्यादा है। पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।
3. एक आदमी 3600 रु के उधार को 40 वार्षिक किश्तों में अदा करने की व्यवस्था करता है जो कि एक स.श्रे. का निरूपण करती है। जब 30 वी किश्त जता कि जाती है तो उधार पर एक तिहाई बकाया रहता है और उसकी मृत्यु हो जाती है प्रथम किश्त की राशि ज्ञात कीजिए।
4. यदि किसी स.श्रे. के $p^{\text{th}}, q^{\text{th}}$ और r^{th} पद a, b, c है तो प्रदर्शित कीजिए।
 $(q - r) a + (r - p) b + (p - q) c = 0.$
5. किसी सं.श्रे. के p - पदों का योग q और q पदों का योग p है, तो $(p + q)$ पदों का योग ज्ञात कीजिए।
6. यदि a और c मध्य ह.मा. b है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}.$

7. $(x + y + z)$ का मान 15 है यदि a, x, y, z, b सं.श्रे. है, तथा $(1/x) + (1/y) + (1/z)$ का मान $5/3$ है, यदि a, x, y, z, b ह.श्रे. में है तो a और b ज्ञात कीजिए।
8. तीन भिन्न-भिन्न वास्तविक संख्याएँ जो कि ग.श्रे. में हैं, का योग S^2 है, यदि उनका योग αS है तो प्रदर्शित कीजिए कि $\alpha^2 \in (1/3, 1) \cup (1, 3)$.
9. यदि n समीकरण $x^2 (1 - ac) - x (a^2 + c^2) - (1 + ac) = 0$ का मूल है और यदि n ह.मा. a और c के मध्य रखे जाते हैं तो प्रदर्शित कीजिए कि प्रथम और अंतिम माध्य के बीच अन्तर $ac(a - c)$ के बराबर है।
10. एक न्यून कोण α के मध्य वृत्त इस प्रकार बनाये जाते हैं कि वे एक दूसरे को स्पर्श करते हैं यदि प्रथम वृत्त की त्रिज्या R है तो प्रथम n वृत्तों की त्रिज्याओं का योगफल R एवं α के पदों में ज्ञात कीजिए।

Answers

EXERCISE # 1

1. A 2. A 3. A 4. C 5. C 6. D 7. D

8. A 9. C 10. C 11. A 12. C 13. C 14. B

15. A 16. B 17. D 18. D 19. AC 20. AC

21. ABCD 22. 2 23. 0 24. 1210 25. 0

EXERCISE # 2

2. 8 terms. Series $1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, \dots$ 3. Rs. 51

5. $-(p + q)$ 7. $a = 1, b = 9$ or $b = 1, a = 9$

$$10. \frac{R \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \left[\left(\frac{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}} \right)^n - 1 \right]$$

for 39 Yrs. Que. of IIT-JEE
 &
 15 Yrs. Que. of AIEEE
 we have distributed already a book