

विध्न विचारत भीरु जन, नहीं आरम्भे काम,
विपति देख छोड़े तुरंत मध्यम मन कर श्याम।
पुरुष सिंह संकल्प कर, सहते विपति अनेक,
'बना' न छोड़े ध्येय को, रघुबर राखे टेक।।

रचित: मानव धर्म प्रणेता
सद्गुरु श्री रणछोड़दासजी महाराज

प्रायिकता (Probability)

*Lest men suspect your tale untrue
Keep probability in Gay, goin*

प्रकृति में ऐसी अनेक घटनायें होती हैं जिसके परिणाम का अनमान पहले से नहीं लगाया जा सकता है। उदाहरण के लिए : एक सिक्के के उछालने पर एक शीर्ष (head) का एक पुच्छ (tail) आ सकता है। प्रायिकता सिद्धान्त का उद्देश इन परिणामों की अनिश्चितता को ज्ञात करना है।

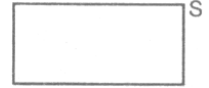
(I) महत्वपूर्ण परिभाषायें :

(i) यादृच्छिक प्रयोग : (Random Experiment)

यह सभी ज्ञात परिणामों में से एक परिणाम आने का प्रयोग है। उदाहरण के लिए एक पासे को फेंकने पर उसके परिणामों {1, 2, 3, 4, 5, 6} में से कोई भी एक परिणाम आ सकता है। इसी प्रकार ताश के 52 में से एक पत्ता खींचना भी एक यादृच्छिक प्रयोग है।

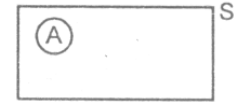
(ii) प्रतिदर्श समष्टि : (Sample Space)

यादृच्छिक प्रयोग के सभी सम्भव परिणामों के समुच्चय को प्रतिदर्श समष्टि कहते हैं। उदाहरण के लिए एक सिक्के के उछालने पर {H, T} उसकी प्रतिदर्श समष्टि है। समुच्चय संकेत में इसे सर्वभौतिक समुच्चय के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।



(iii) घटना : (Event)

यदि प्रतिदर्श समष्टि का उपसमुच्चय है। उदाहरण के लिए एक सिक्के को उछालने पर शीर्ष या एक पासे को फेंकने पर अभाज्य संख्या का आना। व्यापक रूप में यदि एक प्रतिदर्श समष्टि में 'n' अवयव हैं तो इसके अधिकतम 2^n घटनायें संबंधित हो सकती हैं।



(vi) पूरक घटना : (Complement of Event)

प्रतिदर्श समष्टि S के सापेक्ष घटना A की पूरक घटना S के उन सभी अवयवों का समुच्चय है जो 'A' में नहीं है। सामान्यता इसे A' , \bar{A} या A^c द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

(v) सरल घटना : (Simple Event)

ऐसी घटना जिसमें केवल एक ही प्रतिदर्श बिन्दु होता है, प्रारम्भिक या सरल घटना कहलाती है। उदाहरण के लिए एक सिक्के को दो बार उछालने पर पहली बार शीर्ष तथा दूसरी बार पुच्छ आना एक सरल घटना है।

(vi) मिश्र या संयुक्त घटना : (Compound Event)

जब दो या दो से अधिक घटनायें एक साथ घटित होती हैं तो इस घटना को संयुक्त या मिश्र घटना कहते हैं। संकेत रूप में $A \cap B$ या $A + B$ दो घटनाओं A या B में से किसी एक के घटित होने को प्रदर्शित करता है।

नोट : " $A \cup B$ " या $A+B$ दो घटनाओं A या B में से किसी एक के घटित होने को प्रदर्शित करता है।

(vii) समसम्भावी घटनायें : (Equally likely Event)

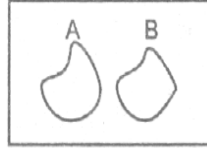
यदि प्रत्येक घटनाओं के घटने की सम्भावना समान हो, तो इन्हें सम्भावी घटनायें कहते हैं।

उदाहरण

- (i) एक सिक्के को उछालने पर, शीर्ष और पुच्छ आने की सम्भावना समान है।
- (ii) एक साधारण पासे को फेंकने पर घटनाओं {1}, {2}, {3} और {4} के घटित होने की सम्भावना बराबर है।
- (iii) एक पक्षपाती (biased) सिक्के को उछालने पर घटनाएँ {H} और {T} समसम्भावी नहीं हैं।

(viii) परस्पर अपवर्जी घटनायें : (Mutually Exclusive / Disjoint/Incompatible Events)

दो घटनाएँ परस्पर अपवर्जी कहलाती हैं यदि दोनों घटनाएँ एक साथ घटित नहीं हो सकती हो। वेन रेखाचित्र में घटनाएँ A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं। गणितीय रूप में इसे $A \cap B = \phi$ लिखते हैं।



घटनाएँ $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ परस्पर अपवर्जी घटनाएँ होती हैं यदि $A_i \cap A_j = \phi \forall i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ जहाँ $i \neq j$

नोट : यदि $A_i \cap A_j = \phi \forall i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ जहाँ $i \neq j$ तब $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \phi$ लेकिन इसका विलोम सत्य होना आवश्यक नहीं है।

(ix) घटनाओं का निःशेष निकाय : (Exhaustive system of events)

ऐसी घटनाओं का समुच्चय जिसके बाहर कोई घटना घटित ना हो एवं घटनाओं $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ में से कम से कम एक घटना प्रयोग के दौरान घटित हो, घटनाओं का निःशेष निकाय कहलाता है।

गणितीय रूप में इसे $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \dots E_n = S$ (प्रतिदर्श समुच्चय) लिखते हैं।

(II) प्रायिकता की उच्च स्तरीय परिभाषा : (Classical (A priori) Definition of Probability)

यदि एक प्रयोग में कुल $(m + n)$ परिणाम आते हैं जिनके घटने की सम्भावना समान हों तथा जो एक दूसरे से परस्पर अपवर्जी हों तथा यदि एक घटना 'A' के अनुकूल परिणाम 'm' जबकि 'n' प्रतिकूल परिणाम हो, तब घटना 'A' के घटित होने की प्रायिकता।

$$P(A) = \frac{m}{m+n} = \frac{\text{अनुकूल स्थितियों की संख्या}}{\text{कुल स्थितियों की संख्या}}$$

$$\text{अर्थात् } P(A) = \frac{m}{m+n}$$

यहां 'A' का अनुकूल संयोगानुपात $m : n$ जबकि 'A' का प्रतिकूल संयोगानुपात $n : m$ है।

नोट : $P(\bar{A})$ या $P(A')$ या $P(A^c)$ अर्थात् A के घटित नहीं होने की प्रायिकता $= \frac{n}{m+n} = 1 - P(A)$

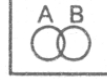
ऊपर दिये गये में हम घटना A के अनुकूल स्थितियों की संख्या को $n(A)$ तथा प्रतिदर्श समष्टि S के कुल परिणामों की संख्या को $n(S)$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

(III) प्रायिकता की योगशील प्रमेय : (Addition theorem of probability)

यदि किसी प्रयोग में 'A' तथा 'B' दो घटनायें हैं जो

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



डी-मोर्गन नियम: यदि A & B सार्वभौमिक समुच्चय U के दो उपसमुच्चय हैं, तो

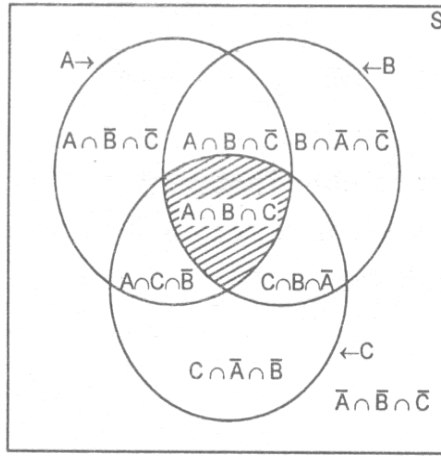
$$(a) (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(b) (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

वितरण नियम : (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$(b) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

किसी तीन घटनाओं A, B तथा C के लिए, निम्न रेखाचित्र में



- (i) $P(A \text{ या } B \text{ या } C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$
(ii) $P(A, B, C \text{ में कम से कम हो घटित हो}) = P(B \cap C) + P(C \cap A) + P(A \cap B) - 2P(A \cap B \cap C)$
(iii) $P(A, B, C \text{ में निश्चित रूप से दो घटित हो}) = P(B \cap C) + P(C \cap A) + P(A \cap B) - 3P(A \cap B \cap C)$
(iv) $P(A, B, C \text{ में निश्चित रूप से एक घटित हो}) = P(A) + P(B) + P(C) - 2P(B \cap C) - 2P(C \cap A) - 2P(A \cap B) + 3P(A \cap B \cap C)$

(IV) प्रतिबंधी प्रायिकता : (Conditional Probability)

यदि A तथा B दो घटनाएँ हों, तब $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

नोट:- पर अपवर्जी घटनाओं के लिए $P(A/B) = 0$

(V) स्वतंत्र और परतंत्र घटनाएँ (Independent and dependent events)

यदि दो घटनायें इस प्रकार हों कि इसमें से किसी एक घटना के घटित होने या न होने का प्रभाव दूसरी घटना के घटित होने या न होने पर नहीं पड़ता है, तो घटनायें स्वतंत्र कहलाती हैं।

गणितीय रूप में : यदि $P(A \cap B) = P(A) P(B)$, तो A तथा B स्वतंत्र हैं।

विशेष : (i) यदि A तथा B स्वतंत्र हैं, तब (a) A' तथा B' भी स्वतंत्र होंगे। (b) A तथा B' स्वतंत्र हैं तथा (c) A' तथा B भी स्वतंत्र हैं।

(ii) यदि A तथा B स्वतंत्र हैं, तो $P(A/B) = P(A)$ ।
यदि घटनायें स्वतंत्र नहीं हैं, तो वे परतंत्र कहलाती हैं।

तीन या अधिक घटनाओं की स्वतंत्रता (Independency of three or more events):

तीन घटनायें A, B & C स्वतंत्र हैं यदि और केवल यदि निम्न शर्तें सही हो :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad ; \quad P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

$$P(C \cap A) = P(C) \cdot P(A) \quad ; \quad P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

(VI) द्विपद प्रायिकता प्रमेय (Binomial Probability Theorem):

यदि एक प्रयोग इस प्रकार है कि सफलता या असफलता की प्रायिकता परीक्षणों के साथ परिवर्तित नहीं होती है, तो एक प्रयोग के n परीक्षणों में ठीक r सफलता प्राप्त करने की प्रायिकता ${}^nC_r p^r q^{n-r}$ होती है, जहाँ 'p' सफलता की प्रायिकता है और q असफलता की प्रायिकता है तथा $p + q = 1$.

(VII) उम्मीद (Expectation):

यदि एक प्रयोग में n सम्भवनाओं A_1, A_2, \dots, A_n की प्रायिकताएँ क्रमशः p_1, p_2, \dots, p_n है। यदि M_1, M_2, \dots, M_n क्रमशः संगत सम्भावनाओं से संबंधित है तो प्रयोग की उम्मीद का मान $\sum_{i=1}^n p_i M_i$ से दिया जाता है।

(VIII) कुल प्रायिकता प्रमेय (Total Probability Theorem)

यदि n परस्पर अपवर्जी तथा निःशेष घटनाओं B_1, B_2, \dots, B_n में एक घटना A घटित होती है तथा प्रायिकताएँ $P(A/B_1), P(A/B_2), \dots, P(A/B_n)$ ज्ञात है, तब

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A/B_i)$$

प्रमाण

घटना A, n परस्पर अपवर्ती तथा निःशेष घटनाओं $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ में से एक के साथ घटित हो सकती है।

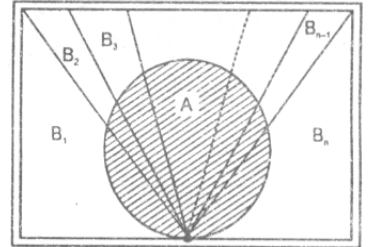
$$\text{अतः } A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i)$$

अब,

$$P(A \cap B_i) = P(A) \cdot P(B_i / A) = P(B_i / A) = P(B_i) \cdot P(A/B_i)$$

$$\therefore P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A/B_i)$$



(IX) बेज प्रमेय (Bayes Theorem):

यदि n परस्पर अपवर्जी तथा निःशेष घटनाओं B_1, B_2, \dots, B_n में किसी एक के साथ एक घटना A घटित हो सकती हो तथा प्रायिकताएँ $P(A/B_1), P(A/B_2), \dots, P(A/B_n)$ ज्ञात हो, तो

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A/B_i)}$$

प्रमाण :

n परस्पर अपवर्जी तथा निःशेष घटनाओं $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ में से एक के साथ घटना A घटित होती है।

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$$

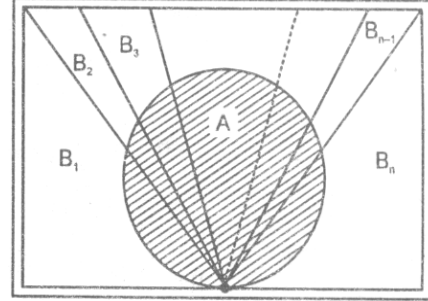
$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i)$$

अब : $A \equiv$ घटना जो दी गई है : $B_i =$ घटना जो हम चाहते हैं।

$$P(A \cap B_i) = P(A) \cdot P(B_i / A) = P(B_i) \cdot P(AB_i)$$

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A / B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P(A / B_i)}{\sum_{i=1}^n P(A \cap B_i)}$$

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A / B_i)}{\sum P(B_i) \cdot P(A / B_i)}$$



(X) गवाही का मान (Value of Testimony):

यदि दो स्वतंत्र गवाहों A और B द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकताएँ p_1 और p_2 हैं, तो P (उनका संयुक्त कथन सत्य है)

$$= \frac{p_1 p_2}{p_1 p_2 + (1 - p_1)(1 - p_2)}$$

इस स्थिति में यह माना गया है कि घटना के बारे में A और B के कथन के अलावा हमें कोई जानकारी नहीं है। हालांकि यदि उनके कथन के पहले घटना के घटित होने की प्रायिकता p हो, तो p (उनका संयुक्त कथन सत्य है) n

$$= \frac{p p_1 p_2}{p p_1 p_2 + (1 - p)(1 - p_1)(1 - p_2)}$$

यहाँ यह माना गया है कि सभी स्वतंत्र गवाहों द्वारा दिये गये बयान केवल दो तरीकों से दिये जा सकते हैं। अतः यही सभी गवाह झुठ बोलते हैं तो वे सभी समान झुठ बोलने पर सहमत हैं। यदि ऐसा नहीं है और उनके एक समान गवाही की सम्भावना c है, तो

उनके कथन के सत्य होने प्रायिकता = $P p_1 p_2$

उनके कथन के असत्य होने की प्रायिकता = $(1 - p) \cdot c (1 - p_1) (1 - p_2)$

(XI) प्रायिकता वितरण (Binomial Probability Distribution) :

(i) एक प्रायिकता वितरण हमें यह बताता है कि कुल प्रायिकता 1 को यादृच्छिक चर के अनेक मानों में कैसे विभाजित किया जा सकता है।

(ii) एक यादृच्छिक चर के किसी भी प्रायिकता वितरण का माध्य :

$$\mu = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} = \sum p_i x_i \quad (\text{चूँकि } \sum p_i = 1)$$

(iii) एक यादृच्छिक चर का प्रसरण : $\sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$

$$\therefore \sigma^2 = \sum p_i x_i^2 - \mu^2 \quad (\text{Note that SD} = + \sqrt{\sigma^2})$$

(iv) द्विपद विचर 'X' के लिए प्रायिकता वितरण :

$P(X = r) = {}^n C_r p^r q^{n-r}$ जहाँ $P(X = r)$, r सफलताओं की प्रायिकता है।

(recurrence formula) $\frac{P(r+1)}{P(r)} = \frac{n-r}{r+1} \cdot \frac{p}{q}$ बहुत उपयोगी है।

BPD का माध्य = np ; BPD का प्रसरण = npq.

- (v) यदि 'p' किसी कार्य में एक व्यक्ति के सफल होने की सम्भावना हो तथा सफल होने पर वह 'M' राशि प्राप्त करता है तब उसकी आकांक्षा का सम्भव मान = pM

(XII) ज्यामितीय अनुप्रयोग (Geometrical Applications):

निम्नलिखित कथन प्रामाणिक है :

- (i) यदि सरल रेखाखण्ड AB पर यादृच्छिक रूप से एक बिन्दु लिया जाता है, तो इसके रेखाखण्ड के एक निश्चित भाग PQ पर स्थित होने की सम्भावना PQ/AB है। अर्थात् प्रायिकता = $\frac{\text{अनुकूल लम्बाई}}{\text{कुल लम्बाई}}$
- (ii) यदि क्षेत्रफल S जिसमें क्षेत्र σ उपस्थित है, में यादृच्छिक रूप से एक बिन्दु लिया जाता है तो बिन्दु के क्षेत्र σ में होने की सम्भावना σ/S होगी। अर्थात् प्रायिकता = $\frac{\text{अनुकूल लम्बाई}}{\text{कुल क्षेत्रफल}}$

Exercise - 1

1-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

- अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, से बिना पुनर्स्थान 9 अंकों की एक संख्या यादृच्छा लिखी जाती है, तो संख्या के 9 से विभाजित होने की प्रायिकता है—
 (A) 1/9 (B) 1/2 (C) 1 (D) 9!9⁹
- प्रथम 100 धनात्मक पूर्णांकों में से एक पूर्णांक x चुना जाता है तो $x + \frac{100}{x} > 50$ होने की प्रायिकता है —
 (A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{11}{20}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) इनमें से कोई नहीं
- दो पासों को एक साथ फेंका जाता है, तो ऊपर फलकों पर दो अंकों का योग कम से कम 10 आने की प्रायिकता है —
 (A) 1/6 (B) 1/12 (C) 1/18 (D) इनमें से कोई नहीं
- 2n लड़कों को यादृच्छिक रूप से दो उपसमूहों जिनमें प्रत्येक में n लड़के हैं, में विभाजित किया जाता है तो दो अधिकतम लम्बाई वाले लड़कों के अलग-अलग समूह में आने की प्रायिकता है —
 (A) $\frac{n}{2n-1}$ (B) $\frac{n-1}{2n-1}$ (C) $\frac{2n-1}{4n^2}$ (D) इनमें से कोई नहीं
- ब्रिज के खेल में ताश के 52 पत्तों में एक खिलाड़ी को 13 पत्त जिनमें 9 पत्ते एक ही प्रकार हो, देने की संभावना है —
 (A) $\frac{4 \cdot {}^{13}C_9 \cdot {}^{39}C_4}{{}^{52}C_{13}}$ (B) $\frac{4! \cdot {}^{13}C_9 \cdot {}^{39}C_4}{{}^{52}C_{13}}$ (C) $\frac{{}^{13}C_9 \cdot {}^{39}C_4}{{}^{52}C_{13}}$ (D) इनमें से कोई नहीं
- एक ताश की गड्डी में सक एक पत्ता निकालने पर घटनाएँ निकाला गया पत्ता हुकुम और निकाला गया पत्ता इक्का है—
 (A) परस्पर अपवर्जी (B) सम्सम्भावी
 (C) घटनाओं का निःशेष निकाय (D) इनमें से कोई नहीं

7. यदि A और B एक अनुप्रयोग की कोई घटनायें है, तो $A^C - B =$
 (A) $(A \cap B)^C$ (B) $A^C - (A \cap B)$ (C) $(A \cup B)^C$ (D) $A - B$
8. एक पासा फेंकने पर माना 'एक विषम संख्या का आना' घटना A है और '3 से विभाजित अंक का आना' घटना B है, तो निम्न में से कौन सा कथन सत्य है—
 (i) $B \subset A$ (ii) $B - A \subset A$ (iii) $B - A \subset A^C$ (iv) $A - B = A \cap B^C$
 (A) (i) and (ii) (B) (i), (iii) (C) (ii) and (iii) (D) (iii) and (iv)
9. एक अनुप्रयोग के चार सम्भव परिणाम S_1, S_2, S_3, S_4 हैं जिनकी प्रायिकताएँ क्रमशः p_1, p_2, p_3 व p_4 है, तो निम्न में से कौनसा प्रायिकता निरूपण सम्भव है। [$S_1 S_2 S_3 S_4$ को परस्पर युग्मत अपवर्जी मानें]
 (A) $p_1 = 0.2, p_2 = 0.35, p_3 = 0.10, p_4 = 0.05$
 (B) $p_1 = 0.40, p_2 = -0.20, p_3 = 0.60, p_4 = 0.20$
 (C) $p_1 = 0.30, p_2 = 0.60, p_3 = 0.10, p_4 = 0.10$
 (D) $p_1 = 0.20, p_2 = 0.30, p_3 = 0.40, p_4 = 0.10$
10. पासों के एक युग्म के फेंकने पर, घटनायें "प्रथम पासे पर अंक 6" और "दोनों पासों पर अंकों का योग 7" है—
 (A) परस्पर अपवर्जी (B) घटनाओं का निःशेष निकाय
 (C) स्वतंत्र (D) परतंत्र
11. एक नौकरी के 13 आवेदकों में से 8 पुरुष व 5 स्त्रीयों है। दो व्यक्तियों को नौकरी के लिए चुनना है, तो चुने गये व्यक्तियों में कम से कम स्त्री होने की प्रायिकता है—
 (A) $2/39$ (B) $14/39$ (C) $5/13$ (D) $10/13$
12. एक निष्पक्षपाती पासे को उछाला जाता है। यदि संख्या विषम है, तो इसके अभाज्य होने की प्रायिकता है —
 (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{1}{3}$
13. भली-भाँती फैंटी हुई ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। निकाला गया पत्ता हुकुम का आता है, तो इस पत्ते के इक्का होने की प्रायिकता है—
 (A) $\frac{1}{13}$ (B) $\frac{1}{52}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) इनमें से कोई नहीं
14. पासों के एक युग्म को फैंका जाता है। यदि दोनों पर अंकों का योग 8 है, तो द्वितीय पासे पर अंक 5 आने की प्रायिकता है —
 (A) $\frac{5}{36}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$
15. 3 स्वतंत्र परीक्षणों की एक श्रेणी में ठीक 3 सफलताओं की प्रायिकता 3 असफलताओं की प्रायिकता से 12 गुणा ज्यादा है, तो प्रत्येक परीक्षण में सफलता की प्रायिकता है —
 (A) $1/5$ (B) $2/5$ (C) $3/5$ (D) $4/5$
16. एक थैले में 2 सफेद और 4 काली गेंदे है। एक-एक गेंद पुनर्स्थापन के साथ 5 बार निकाली जाती है तो कम से कम चार गेंदों के सफेद होने की प्रायिकता है —
 (A) $4/81$ (B) $10/243$ (C) $11/243$ (D) इनमें से कोई नहीं
17. A तथा B जिनका खेल कौशल एक समान है, 5 अंकों का एक खेल खेलते हैं। A के 2 अंक तथा B के 1 अंक जीतने के पश्चात् A के खेल जीतने की प्रायिकता है —
 (A) $1/2$ (B) $2/3$ (C) $3/4$ (D) इनमें से कोई नहीं

18. एक पात्र में 3 लाल व 2 सफेद गेंदे हैं। एक व्यक्ति दो गेंदों को यादृच्छिक बिना पुनर्स्थापन के निकालता है तथा उसे प्रत्येक लाल गेंद पर 20 पैसे व सफेद गेंद पर 10 पैसे देने का वादा किया जाता है तो उसकी आंकाक्षा है –
 (A) 24 paise (B) 30 paise (C) 32 paise (D) 35 paise
19. A और B, 99 रु. के दावे के लिए एक पासे को फेंकते हैं जो कि पहले 4 फेंकने वाले द्वारा जीता जायेगा। यदि A पहले फेंकता है तो उनकी आंकाक्षा क्रमशः होगी—
 (A) 50 & 49 (B) 54 & 45 (C) 45 & 54 (D) इनमें से कोई नहीं
20. A के सचल बोलने के पक्ष में संयोगानुपात 1 : 2 और B के सच बोलने के प्रतिकूल संयोगानुपात 1 : 3 है। एक पासा फेंका जाता है तथा A और B दोनों कहते हैं कि पासे पर अंक 4 आया है तो उनके कथन के सच होने की प्रायिकता है –
 (A) $\frac{1}{30}$ (B) $\frac{1}{24}$ (C) $\frac{11}{360}$ (D) $\frac{15}{17}$

एक से अधिक सही

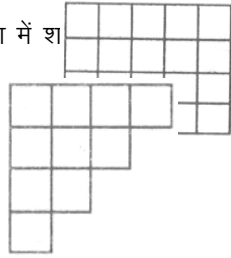
21. एक पासे को फेंकने पर 'एक विषम संख्या का आना' घटना A है, 'एक सम संख्या का आना' घटना B है, "4 या 4 से बड़ा अंक आना" घटना C है। '3 से छोटा अंक आना' घटना D है, तो –
 (A) A और B परस्पर अपवर्जी व निःशेष है। (B) A और C परस्पर अपवर्जी व निःशेष है।
 (C) A, C और D एक निःशेष निकाय बनाते हैं। (D) B, C और D एक निःशेष निकाय बनाते हैं।
22. यदि M और N दो घटनायें हैं, तो निम्न में से कौन सा इनमें से ठीक एक के घटित होने की प्रायिकता को प्रदर्शित करता है—
 (A) $P(M) + P(N) - 2P(M \cap N)$ (B) $P(M) + P(N) - P(M \cap N)$
 (C) $P(\bar{M}) + P(\bar{N}) - 2P(\bar{M} \cap \bar{N})$ (D) $P(M \cap \bar{N}) + P(\bar{M} \cap N)$
23. माना $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$ और $P(A \cup B) = P(A) + p(B) - P(A).P(B)$ तो :
 (A) $P(B/A) = P(B) - (A)$ (B) $P(A^C \cup B^C) = P(A^C) + P(B^C)$
 (C) $P((A \cup B)^C) = P(A^C).P(B^C)$ (D) $P(A/B) = P(A)$
24. यदि M और N स्वतंत्र घटनायें इस प्रकार हैं कि $0 < P(M) < 1$ & $0 < P(N) < 1$ तो—
 (A) M और N परस्पर अपवर्जी है। (B) M और \bar{N} स्वतंत्र है।
 (C) \bar{M} और \bar{N} स्वतंत्र है। (D) $P(M/N) + P(\bar{M}/N) = 1$
25. एक निष्पक्षपाती सिक्का 99 बार उछाला जाता है। यदि X बार शीर्ष आता है, तो $P(X = r)$, r के किस मान पर अधिकतम है—
 (A) 49 (B) 50 (C) 51 (D) इनमें से कोई नहीं

1-B (विषयात्मक प्रश्न)

1. निम्नलिखित प्रयोगों की प्रतिदर्श समष्टि लिखिए –
 (i) तीन सिक्कों को उछालने की घटना की प्रतिदर्श समष्टि लिखिये।
 (ii) अनुप्रयोग 'पुनर्स्थापन किये बिना तीन लड़कों तथा दो लड़कियों के समुह में से दो चुनना' की प्रतिदर्श समष्टि लिखिये।
2. अंको 1, 2, 3...⁹ को यादृच्छिक रूप से व्यवस्थित करने पर प्रायिकता ज्ञात करो कि अंक 1, 2, 3 एक साथ तथा इसी क्रम में आये।

3. यदि 6 लड़के तथा 6 लड़कियां एक पंक्ति में यादृच्छिक बैठे हैं तो 6 लड़कियों के साथ बैठने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
4. तीन व्यक्ति A, B तथा C एक सभा में 5 अन्य व्यक्तियों के साथ बोलते हैं। यदि व्यक्ति यादृच्छिक रूप से बोलते हैं तो A के B से तथा B के C से पहले बोलने की प्रायिकता ज्ञात करो।
5. 1200 के भाजकों में से एक यादृच्छिक रूप से चुना जाता है तो इसके सम होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

6. (i) एक समान वर्गों के जाल से एक आयत यादृच्छिक रूप चुना जाता है। इस आयत के वर्ग होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
(ii) दिये गये जाल में 5 अक्षरों को व्यवस्थित किया जाता है।



कोई भी पंक्ति खाली ना रहने की सम्भावना ज्ञात कीजिए।

7. यहाँ पर तीन घटनायें A, B, C हैं जिनमें से निश्चित रूप से एक और केवल एक ही घटना घटित होती है। A के प्रतिकूल संयोगानुपात 8 : 3 तथा B के प्रतिकूल संयोगानुपात 5 : 2 हैं। तो C के प्रतिकूल संयोगानुपात ज्ञात करो।
8. पासों के एक युग्म को फैंकने पर
(a) प्रथम पासे पर विषम अंक तथा दोनों पासों का योग आठ
(b) प्रथम पासे पर चार तथा दूसरे पासे पर पांच आने की घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं या नहीं ?
9. एक डिब्बा जिसमें 4 लाल, 3 सफेद तथा 5 नीली गेंदें हैं, में से क्रमागत दो गेंदें निकाली जाती हैं, तो 'एक गेंद के लाल तथा दूसरी गेंद के सफेद' होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
10. (i) पासों एक युग्म को फैंकने में "अंकों का योग 8 और 11" नहीं आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
(ii) एक पासा युग्म को फैंकने पर "प्रथम पासे पर विषम अंक तथा अंकों का कुल योग 8" आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
11. यदि $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.48$ तथा $P(A \cap B) = 0.16$ हो, तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।
(i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(A/B)$ (iii) $P(A' \cap B')$
13. एक थैले में 6 सफेद 7 लाल और 6 नीली गेंदें हैं। तीन गेंदें यादृच्छा निकाली जाती हैं तो "प्रत्येक रंग की एक गेंद" होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
14. A के पास लाटरी के 3 टिकट हैं जिनमें 3 इनाम तथा 9 खाली हैं तथा B के पास 2 टिकट जिनमें 2 इनाम तथा 6 खाली हैं, तो उनकी सफलता की सम्भावनाओं की तुलना कीजिए।
15. एक निश्चित घटना के प्रतिकूल संयोगानुपात 5 : 2 है और एक अन्य घटना जो कि प्रथम से स्वतंत्र है के पक्ष में संयोगानुपात 6 : 5 है तो कम से कम एक घटना के घटित होने की सम्भावना ज्ञात कीजिए।
16. A, B, C पुनर्स्थापन के साथ क्रम से एक-एक पत्ता एक ताश की गड्डी में से निकालते हैं तथा जो सर्वप्रथम हुकुम का पत्ता निकालता है वह जीतता है तो उनके जीतने की सम्भावनाएँ ज्ञात कीजिए।

17. औसतन 10 जहाजों में से एक नष्ट हो जाता है तो 5 जहाजों में से कम से कम 4 के सुरक्षित पहुँचने की संभावना ज्ञात कीजिए।
18. एक थैले में 9 सिक्के हैं, जिनमें से 5 सिक्के रुपये के तथा 4 सिक्के अज्ञात तथा समान मान के हैं ज्ञात कीजिए की सिक्के निश्चित ही क्या होने चाहिए जबकि निकाला गया संभावित मान 60 पैसे है।
19. A की जेग में 1 रुपये और चार 10 पैसे के सिक्के हैं। वह दो सिक्के यादृच्छिक निकालता है तथा B व C को देने का वादा करता है तो C की आकांक्षा का मान ज्ञात कीजिए।
20. कक्षा XI में 5 छात्र योग्य हैं तथा कक्षा XII में 8 छात्र योग्य हैं। प्रत्येक कक्षा में कुल छात्र हैं। कक्षा XI के पक्ष में संयोगानुपात 2 : 3 है। एक कक्षा को यादृच्छिक लिया जाता है और अब एक छात्र को चुना जाता है। एक योग्य छात्र को चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
21. प्रथम पात्र में 5 लाल और 2 नीली जबकि द्वितीय पात्र में 2 लाल और 6 नीली गेंदे हैं। एक निष्पक्षपाती सिक्का उछाला जाता है यदि शर्ष आये तो प्रथम पात्र में एक गेंद अन्यथा द्वितीय पात्र में से एक गेंद निकालते हैं तो निम्न की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
 (i) एक लाल गेंद आने की (ii) यदि गेंद नीली हो तो प्रथम पात्र से निकले
22. दो पत्ते क्रमागत एक ताश की गड्डी में से बिना पुर्नस्थापन निकाले जाते हैं तथा द्वितीय पत्ता राजा प्राप्त होता है तो प्रथम पत्ते के भी राजा होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
23. एक पात्र में 2 लाल और 4 नीली गेंदे हैं। दो गेंदे क्रमागत निकाली जाती है यदि प्रथम गेंद का लाल आना व द्वितीय गेंद का नीला आना सफलता माना जाता है तो सफलता का प्रायिकता का विवरण ज्ञात कीजिए। यह दिया गया है कि यह अनुप्रयोग तीन गार पुर्नस्थापना से दोहराया जाता है।
24. A, 3 में से 2 तथा B, 5 में से 4 बार सच बोलता है। वह दोनों इस बार पर समतल है कि एक थैला जिसमें 6 विभिन्न रंगों की गेंदे हैं में से एक लाला गेंद निकाली जाती है तो इस बात के सत्य होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
25. एक सिक्का 5 बार उछाला जाता है तो शीर्ष आने की प्रायिकता वितरण का माध्य व प्रसरण ज्ञात कीजिए।
26. एक 10 cm त्रिज्या के वृत्त में एक समान्तर चतुर्भुज बनाया जाता है तथा समान्तर चतुर्भुज की एक भुजा 12 cms है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वृत्त के अंतर स्थित एक बिन्दु समान्तर चतुर्भुज के भी अन्दर है।

Exercise - 2

केवल एक विकल्प सही

1. एक स्थानीय पोस्ट ऑफिस से M टेलीग्राम भेजे जाते हैं जो यादृच्छिक रूप से N संचार चैनलों में बाँटे जाते हैं ($N > M$). प्रत्येक टेलीग्राम को किसी भी चैनल पर भेजे जाने की प्रायिकता बराबर हो, तो प्रत्येक चैनल पर एक से अधिक टेलीग्राम नहीं भेजे जाने की प्रायिकता है—
 (A) $\frac{{}^N C_M \cdot M!}{N^M}$ (B) $\frac{{}^N C_M \cdot N!}{M^N}$ (C) $1 - \frac{{}^N C_M \cdot M!}{M^N}$ (D) $1 - \frac{{}^N C_M \cdot N!}{N^M}$
2. एक थैले में 7 टिकटों पर क्रमशः संख्याएँ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 अंकित हैं। एक टिकट पुर्नस्थापन के साथ निकाला जाता है तो चार टिकटों के निकालने के बाद संख्याओं का योग 8 आने की संभावना है—
 (A) 165/2401 (B) 149/2401 (C) 3/49 (D) इनमें से कोई नहीं

3. दो पूर्ण संख्याओं को यादृच्छिक चुना जाता है और गुणा किया जाता है। यदि इनके गुणनफल में इकाई का अंक 'सम' अपने की प्रायिकता p और गुणनफल में इकाई का अंक 'विषम' आने की प्रायिकता q हो, तो p/q है –
 (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1
4. एक ताश की गड्डी में एक पत्ता निकाला जाता है तथा पत्ते का पुनर्स्थापन कर गड्डी को फैंटा जाता है। यदि ऐसा 6 बार किया जाता है तो निकाले गये पत्तों के 2 लालपान, 2 ईंट और 2 काले पत्ते होने की प्रायिकता होगी—
 (A) 90/1024 (B) 45/1024 (C) 1/1024 (D) इनमें से कोई नहीं
5. एक बटुएँ में 10 सिक्के हैं जिनमें एक रुपये का सिक्का है और शेष सभी 5 पैसे के सिक्के हैं। दूसरे बटुएँ में 5 पैसे वाले 10 सिक्के हैं। पहले बटुएँ में से 9 सिक्के निकालकर दूसरे में रख दिये जाते हैं और इसके पश्चात दूसरे में से 9 सिक्के निकालकर पहले में रख दिये जाते हैं। तो रुपये का सिक्का अब भी पहले बटुएँ में ही होने की सम्भावना है –
 (A) 9/19 (B) 10/19 (C) 4/9 (D) इनमें से कोई नहीं
6. 15 कूपनों पर क्रमशः 1, 2, 3,, 15 नामांकित हैं। एक-एक करके पुनर्स्थापन के साथ 7 कूपन यादृच्छिक चुने जाते हैं। चुने हुये कूपन पर अधिकतम अंक 9 आने की प्रायिकता है –
 (A) $\left(\frac{9}{16}\right)^6$ (B) $\left(\frac{8}{15}\right)^7$ (C) $\left(\frac{3}{5}\right)^7$ (D) $\frac{9^7 - 8^7}{15^7}$
7. एक बैग में $(n + 1)$ सिक्के हैं। यह ज्ञात है कि इनमें से एक सिक्के के दोनों तरफ शीर्ष है जबकि दूसरे सिक्के सामान्य है। इन सिक्कों में से एक सिक्का यादृच्छिक रूप से चुना जाता है तथा उछाला जाता है। यदि उछाले हुए सिक्के पर शीर्ष आने की प्रायिकता $7/12$ हो तो n का मान होगा –
 (A) 5 (B) 6 (C) 4 (D) 3
8. यदि $\frac{(1+3p)}{3}, \frac{(1-p)}{4}$ और $\frac{(1-2p)}{2}$ तीन युग्मवत परस्पर अपवर्जी घटनाओं की प्रायिकतायें हैं तो p के मानों का सतुच्च है—
 (A) $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ (B) $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ (C) $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ (D) $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$
9. माना कि एक व्यक्ति जिसकी आयु x हैं के एक वर्ष में मरने की प्रायिकता p है। n व्यक्तियों $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ जिनमें प्रत्येक की आयु x वर्ष है में से A_1 के मरने तथा सबसे पहले की प्रायिकता है –
 (A) $\frac{1-p^n}{n}$ (B) $\frac{p}{n}$ (C) $\frac{p(1-p)^{n-1}}{n}$ (D) $\frac{1-(1-p)^n}{n}$
10. एक कक्षा में $2/3$ छात्र लड़के तथा शेष लड़कियाँ हैं। यह ज्ञात है कि एक लड़की के प्रथम श्रेणी में आने की प्रायिकता 0.25 तथा एक लड़के के प्रथम श्रेणी में आने की प्रायिकता 0.28 है। एक छात्र के यादृच्छिक रूप से चुनने पर प्रथम श्रेणी में आने की प्रायिकता है—
 (A) 0.26 (B) 0.265 (C) 0.27 (D) 0.275
11. 4 पात्र हैं जिनमें से प्रथम पात्र में 1 सफेद तथा 1 काली गेंद हैं, दूसरे पात्र में 2 सफेद तथा 3 काली गेंदें हैं, तीसरे पात्र में 3 सफेद तथा 5 काली गेंदें हैं तथा चतुर्थ पात्र में 4 सफेद तथा 7 काली गेंदें हैं। प्रत्येक पात्र में चुनना समसम्भावली नहीं ++ वे पात्र को चुनने की प्रायिकता $\frac{i^2+1}{34}$ ($i=1,2,3,4$) है। यदि हम यादृच्छिक रूप से एक पात्र चुनते हैं तथा 1 गेंद उसमें से निकालते हैं तो निकली हुई गेंद के सफेद होने की प्रायिकता है—
 (A) $\frac{569}{1496}$ (B) $\frac{27}{56}$ (C) $\frac{8}{73}$ (D) इनमें से कोई नहीं

12. दो पूर्ण संख्याओं को यादृच्छता चुना जाता है तथा गुणना किया जाता है। उनके गुणनफल का अंतिम अंक 0 या 5 आने की प्रायिकता है –
 (A) $1/3$ (B) $16/25$ (C) $9/25$ (D) इनमें से कोई नहीं
13. पात्र I तथा II में निम्नलिखित है –
 पात्र I 4 सफेद तथा 5 काली गेंद
 पात्र II 3 सफेद तथा 6 काली गेंद
 एक पात्र को यादृच्छिक चुना जाता है तथा एक गेंद निकाली जाती है तथा इसका रंग नोट किया जाता है तथा इसे पात्र में पुनर्स्थापित किया जाता है। दुबारा उसी पात्र से एक गेंद निकाली जाती है, इसका रंग नोट करके पुनर्स्थापित किया जाता है। यह प्रक्रिया 4 बार दोहराई जाती है तथा परिणामस्वरूप 1 गेंद सफेद तथा 3 काली गेंद नोट की जाती है। इस पात्र के I होने की प्रायिकता है –
 (A) $\frac{125}{287}$ (B) $\frac{64}{127}$ (C) $\frac{25}{287}$ (D) $\frac{79}{192}$
14. एक पात्र या तो "KRISHNAGIRI" से या "DHARAMPURI" से आता है। लिफाफे पर डाक विभाग की मोहर की छाप में क्रमागत "RI" पठनीय है। इस बात की संभावना क्या है कि पात्र Krishnagiri से आया है –
 (A) $3/5$ (B) $2/3$ (C) $9/14$ (D) इनमें से कोई नहीं
15. एक पासे को इस प्रकार बनाया जाता है कि विभिन्न फलकों के आने की प्रायिकता निम्ननुसार है –
- | | | | | | | |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| अंक | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| प्रायिकता | 0.2 | 0.1 | 0.1 | 0.3 | 0.1 | 0.2 |
- यदि $P(A/B) = p_1$ तथा $P(B/C) = p_2$ तथा $P(C/A) = p_3$ हो, तो p_1, p_2, p_3 का मान क्रमशः होगा यदि घटनायें A, B तथा C इस प्रकार हों कि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ तथा $C = \{2, 4, 6\}$
 (A) $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ (D) $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$
16. द्विपद विचर का माध्य तथा प्रसर $3 : 2$ के अनुपात में है। प्रयोग के 10 परीक्षणों में चर का अधिकतम सम्भावी अंक है –
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
17. एक आयत की भुजायें यादृच्छिक चुनी जाती है। प्रत्येक भुजा 10 सेमी. से कम है तथा सभी लम्बाईयों समसम्भावी है। आयत के विकर्ण की लम्बाई 10 से कम होने की सम्भावना है –
 (A) $1/10$ (B) $1/20$ (C) $\pi/4$ (D) $\pi/8$

एक से अधिक विकल्प सही

18. एक छात्र तीन परीक्षा I, II तथा III के लिए उपस्थित होता है। छात्र सफल होता है यदि वह I तथा II या I तथा III परीक्षा पास कर लेता है। छात्र के परीक्षा I, II तथा III में सफल होने की प्रायिकता क्रमशः p, q तथा $1/2$ है। यदि छात्र के सफल होने की प्रायिकता $1/2$ है तो
 (A) $p = 1, q = 0$ (B) $p = 2/3, q = 1/2$
 (C) $p = 3/5, q = 2/3$ (D) यहाँ p तथा q के अनन्त मान है।
19. एक निष्पक्षपाती साधारण पासे युग्म को फैंकने पर तीन घटनाएँ E_1, E_2 & E_3 निम्न प्रकार परिभाषित है :
 E_1 : प्रत्येक पासे के फलक पर अभाज्य संख्या आना
 E_2 : प्रत्येक पासे के फलक पर समान संख्या आना
 E_3 : दोनों पासों के फलकों के अंकों का योग 8 आना, तो
 (A) घटनायें E_1, E_2 & E_3 परस्पर अपवर्जी है।
 (B) घटनायें E_1, E_2 & E_3 युग्मों में परस्पर अपवर्जी नहीं है।

- (C) घटनायें E_1, E_2 स्वतंत्र हैं।
 (D) $P(E_3 | E_1) = 2/9$

20. प्रतिदर्श समष्टि में परिभाषित किन्हीं दो घटनाओं A और B के लिए –

- (A) $P(A/B) \geq \frac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)}$, $P(B) \neq 0$ हमेशा सत्य है।
 (B) $P(A \cup \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
 (C) $P(A \cup B) = 1 - P(A^c) \cdot P(B^c)$ यदि A तथा B स्वतंत्र हैं।
 (D) $P(A \cup B) = 1 - P(A^c) \cdot P(B^c)$ यदि A तथा B परस्पर अपवर्जी हैं।

21. एक निष्पक्षपाती सिक्के को n बार उछाला जाता है। X शीर्ष आने की संख्या को प्रदर्शित करता है। यदि $P(X = 4)$, $P(X = 5)$ तथा $P(X = 6)$ समान्तर श्रेणी में हों, तो n का मान होगा –
 (A) 7 (B) 10 (C) 12 (D) 14

2-B (विषयात्मक प्रश्न)

1. एक बहुविकल्पी प्रश्न के उत्तरों के चार विकल्प दिए हुए हैं जिनमें एक 1,2,3 या सभी सही हो सकते हैं। एक परीक्षार्थी को प्रश्न के अंक तभी मिलेंगे जब वह सभी सही उत्तरों पर निशान लगायेगा। परीक्षार्थी यादृच्छया निशान लगाने का निश्चय करता है। यदि उसके प्रश्न का उत्तर देने के लिए 5 अवसर मिलते हैं तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि उसे प्रश्न में अंक मिलेंगे।
2. 3 बंदूकधार X, Y तथा Z एक ही लक्ष्य पर निशाना लगाते हैं। X तथा Y के द्वारा लक्ष्य भेदने की प्रायिकता क्रमशः 2/3 तथा 3/4 है। यदि लक्ष्य पर ठीक दो गोलियाँ मिलने की प्रायिकता 11/24 है, तो Z के लक्ष्य पर ठीक निशाना लगाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
3. एक नाईजिरियन होटल में अंग्रेजी बोलने वालों में से 40 प्रतिशत अंग्रेज तथा 60 प्रतिशत अमेरिकन हैं। अंग्रेजी तथा अमेरिकन शब्द क्रमशः "Rigour" & "Rigor" हैं एक अंग्रेजी बोलने वाला व्यक्ति इस शब्द को लिखता है। एक अक्षर इस शब्द में से यादृच्छिक चुना जाता है तथा यह एक स्वर पाया जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि लिखने वाला व्यक्ति एक अंग्रेज है।
4. दो शिकारी A और B एक भालु पर एक साथ निशाना लगाते हैं। भालु की खाल में एक छोद होने पर ही वह मर जाता है। भालु को A द्वारा मारने की प्रायिकता 0.8 तथा B द्वारा 0.4 है। इस खाल को 280 रु. में बेचा जाता है। यदि इस कीमत को A तथा B के बीच बांटा जाता है तो इनका क्रमशः हिस्सा ज्ञात कीजिए।
5. k लक्ष्यों के समूह जिनमें प्रत्येक एक दूसरे से स्वतंत्र है को एक रेडार इकाई द्वारा पता लगाये जाने की प्रायिकता p है। प्रत्येक 'm' रेडार इकाई लक्ष्यों का दूसरी इकाईयों को स्वतंत्र रूप से पता लगाती है एक समूह में सभी लक्ष्यों के पता नहीं लगा पाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
6. एक व्यक्ति के पास 10 सिक्के हैं इनमें से 1 सिक्के के दोनों ओर शीर्ष है। वह यादृच्छिक रूप से एक सिक्का लेता है तथा इसे 5 बार बछालता है और हमेशा शीर्ष आता है, इस सिक्के के दोनों ओर शीर्ष होने की क्या सम्भावना है ?
7. 52 पत्तों की एक गड्डी में से पत्ता खो जाता है। शेष पत्तों में से 2 पत्ते खींचे जाते हैं तथा यह हुकुम के पत्ते पाये जाते हैं। खोये हुए पत्ते के हुकुम का पत्ता होने की सम्भावना ज्ञात कीजिए।

Exercise - 3

3-A (स्तम्भ मिलान)



1. स्तम्भ I	स्तम्भ II
(A) एक सम पूर्णांक के वर्ग में इकाई अंक 4 होने की प्रायिकता है—	(p) 1
(B) यदि A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं और $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, $P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$, हो, तो $6P(B/A) =$	(q) 2
(C) दो बच्चों में से एक बच्चा समान रूप से लड़का या लड़की हो सकता है। यदि उनमें ठीक एक लड़का होने की प्रायिकता p है, तो $6p =$	(r) 3
(D) एक लड़के द्वारा एक लक्ष्य भेदने की 20% सम्भावना है। माना कि n प्रयासों में से प्रथम बार में लक्ष्य को भेजने की प्रायिकता p है। यदि p असमिका $625p^2 - 175p + 12 < 0$ को संतुष्ट करता है, तो n का मान है —	(s) 4

2. स्तम्भ I	स्तम्भ II
(A) पासों के एक युग्म को फेंका जाता है। यदि दोनों पर अंकों का योग 8 है, तो द्वितीय पासे पर अंक 5 आने वाले प्रायिकता है—	(p) 5/16
(B) एक डिब्बे में 4 सफेद और 3 काली गेंदे हैं। दो गेंदे क्रमागत निकाली जाती है तथा द्वितीय गेंद सफेद पायी जाती है तो प्रथम गेंद के भी सफेद होने की प्रायिकता है —	(q) 1/3
(C) एक पक्षताती सिक्का शीर्ष आने की की प्रायिकता p, $0 < p < 1$ है को प्रथम बार शीर्ष आने तक उछाला जाता है। यदि आवश्यक उछालों के सम होने के प्रायिकता $2/5$ है, तो $p =$	(r) $\frac{1}{2}$
(D) एक सिक्का जिसकी फलकें 3 तथा 5 से नामांकित है, 4 बार उछाला जाता है, इन पर संख्याओं का योग 15 से कम आने के प्रतिकूल संयोगनुपात क्या होगा ?	(s) $\frac{1}{5}$



3-B (कथन/कारण)



3. **कथन -1** : यदि P अंतराल [0, 5] में से यादृच्छिक चुना जाता है, तब समीकरण $x^2 + px + \frac{1}{4}(p+2) = 0$ के वास्तविक मूल होने की प्रायिकता $\frac{3}{5}$ है।
- कथन - 2** : यदि विवेचक ≥ 0 है तो द्विघातीय समीकरण के मूल हमेशा वास्तविक होते हैं।
- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

4. **कथन-1** : चूँकि प्रयोग "एक सिक्का उछालने पर यदि चित्त (Head) आता है, तो एक पांसा फेंका जाता है "कि प्रतिदर्श समष्टि
 $\{(H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6), T\}$

∴ घटना $\{(H, 1), (H, 2), (H, 5)\}$ की प्रायिकता $\frac{3}{7}$ है।

कथन -2: यदि प्रयोग के प्रतिदर्श समष्टि के सभी प्रतिदर्श बिन्दु युग्म रूप में, परस्पर अपवर्जी, समसम्भावी तथा निःशेष हो, तो एक घटना E की प्रायिकता को निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है—

$$P(E) = \frac{\text{घटना R के अनुकूल प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या}}{\text{प्रतिदर्श समष्टि में प्रतिदर्श बिन्दुओं की कुल संख्या}}$$

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

5. **कथन-1:** यदि A तथा B दो स्वतंत्र घटनाये इस प्रकार है कि $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ हो, तो A तथा B परस्पर अपवर्जी घटनायें नहीं हो सकती है।

कथन-2: A तथा B स्वतंत्र घटनाओं के लिए, हम $P(A/B) = P(A)$ रखते है जो परस्पर अपवर्जी घटनाओं के लिए नहीं है।

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

6. **कथन -1:** यदि $\frac{1+4P}{4}, \frac{1-P}{4}, \frac{1-2P}{4}$ तीन युग्मवत परस्पर अपवर्जी घटनाओं की प्रायिकता हो तो P के संभव मान समुच्चय

$$\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \text{ के अवयव है।}$$

कथन-2: यदि तीन घटनायें युग्मवत परस्पर अपवर्जी तथा निःशेषी हो तो उनकी प्रायिकताओं का योग एक के बराबर होता है।

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

3-C (अनुच्छेद)

7. **अनुच्छेद**

यदि A तथा B दो घटनायें है तब उनमें से कम से कम एक के चयन की प्रायिकता $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ होती है। तीन घटनाओं A, B तथा C में से कम से कम एक चयन की प्रायिकता

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

7.1 A, B, C में से किसी भी घटना के न होने की प्रायिकता है -

- (A) $P(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) - P(A) - P(B) - P(C) + P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A)$
 (B) $P(A \cup B \cup C) - P(A) - P(B) - P(C) + P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A) - P(A \cap B \cap C)$
 (C) $P(\bar{A}) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$
 (D) इनमें से कोई नहीं

7.2 ठीक दो घटनाओं के घटित होने की प्रायिकता है—

- (A) $P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cup B) - P(B \cup C) - P(C \cup A)$
 (B) $2(P(A) + P(B) + P(C)) - P(A \cup B) - P(B \cup C) - P(C \cup A)$

(C) $P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A) - 3 \times P(A \cap B \cap C)$

(D) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(\bar{B} \cap \bar{C}) + P(\bar{C} \cap \bar{A})$

7.3 अधिकतम दो घटनाओं के घटित होने की प्रायिकता है—

(A) $P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A) - 3 \times P(A \cap B \cap C)$

(B) $P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A)$

(C) $P(\bar{A}) + P(\bar{B}) + P(\bar{C})$

(D) $P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cup B \cup C)^c$

8. अनुच्छेद

बर्तनों में गेंदों को बाँटने के प्रयोग पर विचार कीजिये। मानाकि हमें M बर्तन दिये गये हैं जिन पर 1 से M तब नम्बर है उनमें हमें n गेंदों को वितरित करना है। ($n < M$) मानाकि $P(A)$ एक से n तक नम्बर के बर्तनों में ठीक एक गेंद की प्रायिकता को प्रदर्शित करता है। तब निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिये।

8.1 यदि गेंदे भिन्न-भिन्न हैं और एक बर्तन में कितनी भी गेंदे जा सकती हो तो $P(A)$ बराबर है —

(A) $\frac{M!}{n^M}$

(B) $\frac{n!}{M^n}$

(C) $\frac{n!}{M P_n}$

(D) $\frac{1}{M^n}$

8.2 यदि गेंदे एक समान हो और बर्तन में कितनी भी गेंदे जा सकती हो तो $P(A)$ बराबर है —

(A) $\frac{1}{M^n}$

(B) $\frac{1}{M^{n-1} C_{M-1}}$

(C) $\frac{1}{M^{n-1} C_{n-1}}$

(D) $\frac{1}{M^{n-1} P_{M-1}}$

8.3 यदि गेंदे एक समान हैं तथा एक बर्तन के अधिकतम एक गेंद रख सकते हो तो $P(A)$ बराबर है—

(A) $\frac{1}{M P_n}$

(B) $\frac{n!}{n C_M}$

(C) $\frac{n!}{M C_n}$

(D) $\frac{1}{M C_n}$

3-D (सत्य/असत्य कथन)

9. यदि तीन घटनायें A, B, C निःशेषी हो तो $P(A) + P(B) + P(C) = 1$

10. $P(\bar{A}) + P(A \cap B) = P(B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$

11. दो धनात्मक राशियों का योग $2n$ के बराबर है। उनका गुणनफल उनके अधिकतम गुणनफल के $3/4$ गुणज से कम नहीं होने की प्रायिकता है—

12. एक पासे को तीन बार फैंकने पर अंकों का योग 15 आता है तो प्रथम पासे पर अंक 4 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

13. एक सिक्के को 5 बार उछाला जाता है तो अधिकतम दो शीर्ष आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

3-E (रिक्त स्थान की पूर्ति)

14. एक गोल मेज के चारों ओर 13 व्यक्ति बैठे हुए हैं, प्रदर्शित कीजिये कि दो निश्चित व्यक्तियों के एक साथ बैठने के प्रतिकूल संयोगानुपात 5 : 1 है।
15. 11 व्यक्तियों में से जो कि एक गोल मेज के चारों ओर बैठे हैं, 3 व्यक्ति A, B & C यादृच्छिक चुने जाते हैं। इनमें से किन्हीं भी दो व्यक्तियों के एक साथ न बैठे जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
16. यदि 12 टिकट जो कि 0, 1, 2,.....11 से नामांकित हैं, एक बैग में रखे हैं। उनमें से तीन टिकट निकले जाते हैं, तो दिखाइये कि इन पर संख्याओं का योग 12 आने की सम्भावना $\frac{3}{55}$ के बराबर होगी।
17. एक पासे युग्म को 5 बार फेंका जाता है तो ठीक दो बार समान अंक जाने की प्रायिकता होगी।
18. एक बार में निशाना लगने की प्रायिकता $\frac{3}{5}$ है, तो तीन बार में कम से कम एक निशाना लगने की प्रायिकता है—

Exercise = 4

4-A (पूर्ववर्ती JEE परीक्षा प्रश्न)

IIT-JEE-2008

1. निम्न समीकरण निकाय लीजिए

$$ax + by = 0; cx + dy = 0, \text{ जहाँ } a, b, c, d \in \{0, 1\}$$

कथन-1: समीकरण निकाय का एक मात्र हल होने की प्रायिकता $\frac{3}{8}$ है।

और

कथन -2: समीकरण निकाय का हल होने की प्रायिकता 1 है।

(A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।

(B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।

(C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।

(D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

2. एक प्रयोग के 10 समप्रायिक (equally likely) परिणाम हैं। माना A व B इस प्रयोग की दो अरिक्त (non-empty) घटनायें हैं। यदि A में 4 परिणाम हैं, तो A व B के स्वतंत्र (independent) होने के लिये B के परिणामों की संख्या निम्न है।
(A) 2, 4 अथवा 8 (B) 3, 6 अथवा 9 (C) 4 अथवा 8 (D) 5 अथवा 10

IIT-JEE-2007

3. एक भारतीय और चार अमेरिकी पुरुषों तथा उनकी पत्नियों को एक गोलमेज के चारों ओर यादृच्छता (randomly) बैठाना है। यदि यह दिया है कि प्रत्येक अमेरिकी पुरुष अपनी पत्नी के बगल में बिठाया गया है, तब भारतीय पुरुष के अपनी पत्नी के बगल में बिठाया गया है, तब भारतीय पुरुष के अपनी पत्नी के बगल में बिठाये जाने की सहप्रतिबन्ध प्रायिकता (conditional

probability), निम्न है।

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{5}$

4. माना कि H_1, H_2, \dots, H_n परस्पर अपवर्जी (mutually exclusive) एवं परिपूर्ण (exhaustive) घटनायें (events) हैं जिनके लिए $O(H_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$. माना कि E कोई अन्य घटना है जिसके लिए $0 < P(E) < 1$ ।

कथन-1: $P(H_i | E) > P(E | H_i) \cdot P(H_i)$ for $i = 1, 2, \dots, n$ ।

क्योंकि

कथन-2: $\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$ ।

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

5. माना कि E^C घटना E के पूरक को दर्शाता है। माना कि E, F, G युगलतः स्वतंत्र (pairwise independent) ऐसी घटनायें हैं जिनके लिए $P(G) > 0$ और $P(E \cap F \cap G) = 0$ है तब $P(E^C \cap F^C | G)$ का मान निम्न है।

- (A) $P(E^C) + P(F^C)$ (B) $P(E^C) - P(F^C)$ (C) $P(E^C) - P(F)$ (D) $P(E) - P(F^C)$

IIT-JEE-2006

6. अनुच्छेद

n पात्रों पर 1 से n तक संख्याएँ अंकित हैं। i वें पात्र में i सफेद और $(n + 1 - i)$ काली गेंद हैं। माना कि E_i यादृच्छिक रूप से i वें पात्र को चुनने की घटना को प्रदर्शित करता है और चुने गये पात्र में से सफेद गेंद चुनने की घटना को w से प्रदर्शित करते हैं।

- 6.1 यदि $i = 1, 2, \dots, n$ के लिए $P(E_i) \propto i$ हो $\lim_{x \rightarrow \infty} P(W) =$

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{1}{4}$

- 6.2 यदि सभी i के लिए $P(E_i) = c$, एक अचर हो, तो $P(E_n | W)$ है -

- (A) $\frac{2}{n+1}$ (B) $\frac{1}{n+1}$ (C) $\frac{n}{n+1}$ (D) $\frac{1}{2}$

- 6.3 यदि n सम है और $P(E_i) = \frac{1}{n} \forall n$ और E उन पात्रों को चुनने की घटना को प्रदर्शित करता है जिन पर सम संख्या अंकित है, तो $P(W | E)$ है-

- (A) $\frac{1}{2n}$ (B) $\frac{n+4}{2(n+1)}$ (C) $\frac{n+2}{2(n+1)}$ (D) $\frac{n+1}{2n}$

IIT-JEE-2005

7. छः फलकों वाले एक निष्पक्षपाती पासे को तब तक फेंका जाता है, जब तक की 1 ना आ जाये तो 1 के सम संख्या में परीक्षणों के आने की प्रायिकता है-

- (A) $\frac{5}{11}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) $\frac{6}{11}$ (D) $\frac{1}{6}$

8. एक व्यक्ति दफ्तर कार, स्कूटर, बस या रेलगाड़ी से जाता है, जिसकी प्रायिकता क्रमशः $\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$ तथा $\frac{1}{7}$ है। यदि वह दफ्तर देरी से पहुंचता है तो क्रमशः कार, स्कूटर, बस या रेलगाड़ी से जाने की प्रायिकता $\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}$ तथा $\frac{1}{9}$ है। ज्ञात है कि वह दफ्तर समय पर पहुंचता है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि वह कार से यात्रा करता है।

IIT-JEE-2004

9. प्रथम 100 प्रकृत संख्याओं में से तीन भिन्न-भिन्न संख्याएँ चुनी जाती हैं। सभी तीनों संख्याओं के 2 तथा 3 से विभाजित होने की प्रायिकता है—
(A) $\frac{4}{25}$ (B) $\frac{4}{35}$ (C) $\frac{4}{55}$ (D) $\frac{4}{1155}$
10. सिद्ध कीजिये $P(A \cup B) P(\bar{A} \cap \bar{B}) \leq P(C)$ जहाँ A तथा B स्वतंत्र घटनायें हैं तथा P(C), A या B में से ठीक एक के घटित होने की प्रायिकता है।
11. एक संदूक में 6 सफेद तथा 12 लाल गेंदे हैं। बिना पुनरावृत्ति के 6 गेंदे निकाली जाती हैं जिनमें से कम से कम 4 गेंदे सफेद हैं, प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि अगले दो ड्रा में ठीक एक गेंद सफेद है।

IIT-JEE-2003

12.
(a) यदि $P(B) = \frac{3}{4}, P(A \cap B \cap \bar{C}) = \frac{1}{3}$ तथा $P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) = \frac{1}{3}$ हो, तो $P(B \cap C)$ है।
(A) 1/12 (B) 1/6 (C) 1/15 (D) 1/9
- (b) समुच्चय $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में से एक-एक करके बिना पुनर्स्थापन के दो संख्याएँ यादृच्छिक चुनी जाती हैं। दोनों संख्याओं में से न्यूनतम संख्या 4 से कम होने की प्रायिकता है—
(A) 1/15 (B) 14/15 (C) 1/5 (D) 4/5
13.
(a) एक व्यक्ति के तीन लगातार परीक्षण किये जाते हैं। उसके प्रथम परीक्षण में पास होने की प्रायिकता P है। उसके पहले परीक्षण में पास या फेल होने के अनुसार अगले परीक्षण में पास होने की प्रायिकता P या P/2 है। यदि वह कम से कम दो परीक्षणों में पास होता है, तो वह चुना जाता है। उसके चयन की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
- (b) A, B तथा C के बीच युद्ध में A, B तथा C को मारने की कोशिश करता है और B तथा C, A को मारने की कोशिश करते हैं। A, B तथा C के लक्ष्य को मारने की प्रायिकता क्रमशः 2/3, 1/2 तथा 1/3 है। यदि A मरता है तो इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि B, A को मारता है और C नहीं मारता है।

IIT-JEE-2002

14. एक संदूक में N सिक्के हैं जिनमें से m सिक्के सामान्य हैं तथा शेष पक्षपाती (biased) हैं। सामान्य सिक्के को उछालने पर शीर्ष (head) आने की प्रायिकता 1/2 है जबकि पक्षपाती सिक्के को उछालने पर शीर्ष आने की प्रायिकता 2/3 है। संदूक में एक सिक्कता यादृच्छिक रूप से निकाल कर दो बार उछाला जाता है। पहली बार शीर्ष आता है तथा दूसरी बार पुच्छ आता है। निकाले गये सिक्के के सामान्य होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

IIT-JEE-2001

15. एक पात्र में m सफेद तथा n काली गेंद है। एक गेंद यादृच्छिक निकाली जाती है तथा जिस रंग की गेंद निकलती है उसे उसी रंग की अतिरिक्त k गेंदों के साथ पात्र में वापस रख दी जाती है। एक गेंद पुनः यादृच्छया निकाली जाती है। प्रायिकता क्या है कि अब निकलने वाली गेंद सफेद होगी ?
16. एक निष्पक्षपाती पासा, जिसकी फलकें 1, 2, 3, 4, 5, 6 से नामांकि है, n बार फेंका जाता है तथा प्रदत्त n अंकों की सूची बनाती जाती है। 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से केवल तीन अंकों के सूची में आने की क्या प्रायिकता होगी ?

IIT-JEE-2000

17. एक सिक्के के उछालने पर शीर्ष आने की प्रायिकता 'p' हैं। यह सिक्का 'n' बार उछाला जाता है। माना लगातार दो (या अधिक) बार शीर्ष ना आने की प्रायिकता p_n है तो सिद्ध कीजिए कि
 $p_1 = 1, p_2 = 1 - p^2$ & $p_n = (1 - P) p_{n-1} + p (1 - p) p_{n-2}, n \geq 3$

IIT-JEE-1999

18. एक निष्पक्षपाती सिक्के को बार-बार उछाला जाता है। यदि प्रथम चार उछाल में पुच्छ आता है, तो पंचम उछाल में शीर्ष आने की प्रायिकता है—
 (A) 1/2 (B) 1/32 (C) 31/32 (D) 1/5
19.
 (a) यदि 1 से 100 के बीच में पूर्णांक m तथा n यादृच्छिक चुने जाते हैं तो $7^m + 7^n$ के रूप में प्राप्त अंक के 5 से विभाजित होने की प्रायिकता है—
 (A) 1/4 (B) 1/7 (C) 1/8 (D) 1/49
- (b) एक छात्र के गणित, भौतिकी तथा रसायन विज्ञान में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता क्रमशः m, p तथा c है। इन विषयों में से, एक छात्र के कम से कम एक विषय में उत्तीर्ण होने की सम्भावना 75% कम से कम दो विषयों में उत्तीर्ण होने की सम्भावना 50% तथा ठीक दो विषयों में उत्तीर्ण होने की सम्भावना 40% है, तो निम्नलिखित कौनसा सम्बन्ध सत्य है ?
 (A) $p + m + c = 19/20$ (B) $p + m + c = 27/20$
 (C) $pmc = 1/10$ (D) $pmc = 1/4$
20. आठ खिलाड़ी $P_1, P_2, P_3, \dots, P_8$ एक नॉक-आउट (knock-out) टूर्नामेंट खेलते हैं। यह ज्ञात है कि जब कभी खिलाड़ी P_i और P_j खेलते हैं तो P_i जीतेगा यदि $i < j$ यह मानते हुए कि प्रत्येक राउण्ड में खिलाड़ियों को यादृच्छया युग्मित किया जाता है, क्या प्रायिकता है कि खिलाड़ी P_4 फाइन में पहुँचेगा ?

IIT-JEE- 1998

21.
 (i) 7 सफेद तथा 3 काली गेंदे यादृच्छिक रूप से एक पंक्ति में रखी जाती है। दो काली गेंदों के पास-पास नहीं आने की प्रायिकता है —
 (A) 1/2 (B) 7/15 (C) 2/15 (D) 1/3
- (ii) तीन बक्सों में 3 सफेद और 1 काली, 2 सफेद तथा 2 काली तथा 1 सफेद, 3 काली गेंद है। प्रत्येक बक्से में से एक गेंद निकाली जाती है, तो निकाली गई गेंदों के 2 सफेद और काली होने की प्रायिकता है—
 (A) 13/32 (B) 1/4 (C) 1/32 (D) 3/16
- (iii) यदि \bar{E} तथा \bar{F} घटनाओं E तथा F की पूरक घटनाएँ हैं तथा $0 < P(F) < 1$, तो —
 (A) $P(E|F) + P(\bar{E}|\bar{F}) = 1$ (B) $P(E|F) + P(\bar{E}|\bar{E}) = 1$

(C) $P(\bar{E} | F) + P(E | \bar{F}) = 1$

(D) $P(E | \bar{F}) + P(\bar{E} | F) = 1$

- (iv) 4 मशीनों में से यह ज्ञात है कि निश्चित रूप से 2 दोषपूर्ण है। इन मशीनों का एक-एक करके तब तक परीक्षण किया जाता है जब तक दोनों दोषपूर्ण मशीनें ज्ञात ना हो जाये। तो इसके लिए केवल दो परिक्षणों की आवश्यकता होने की प्रायिकता है –
 (A) 1/3 (B) 1/6 (C) 1/2 (D) 1/4
- (v) यदि E तथा F घटनायें हैं जिनके लिए $P(E) \leq P(F)$ तथा $P(E \cap F) > 0$ है, तो
 (A) E की उपस्थिति \Rightarrow F की उपस्थिति (B) F की उपस्थिति \Rightarrow E की उपस्थिति
 (C) E की अनुपस्थिति \Rightarrow F की अनुपस्थिति (D) इनमें से कोई भी सत्य नहीं है।

22. 3 खिलाड़ी A, B तथा C चक्रीय रूप से एक सिक्के को (A, B, C, A, B, C, A, B,.....) क्रम में तब उछालते हैं जब तक एक शीर्ष ना आ जाये। मानाकि सिक्के पर शीर्ष आने की प्रायिकता p है। माना कि A, B तथा C के सबसे पहले शीर्ष आने की प्रायिकता क्रमशः α, β तथा γ हैं तो सिद्ध कीजिए $\beta = (1-p)\alpha$ तथा α, β व γ (p के पदों में) ज्ञात कीजिए।

IIT-JEE-1997

23. तीन संख्याएँ समुच्चय $\{1, 2, \dots, 10\}$ से यादृच्छिक बिना प्रतिस्थापन के चुनी जाती है तब चुनी संख्याओं न्यूनतम संख्या 3 है या उनके अधिकतम 7 है, कि प्रायिकता _____ है।
24. एक खेल प्रतियोगिता में 16 खिलाड़ी S_1, S_2, \dots, S_{16} है। इनको यादृच्छिक रूप से 8 युग्म में बांट दिया जाता है। प्रत्येक युग्म में से एक विजेता खिलाड़ी का निर्णय उनके बीच मैच खिलाकर किया जाता है। यह मानते हुए कि सभी खिलाड़ी एक समान हे।
 (a) खिलाड़ी S_1 के 8 विजेता खिलाड़ियों में से होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
 (b) खिलाड़ी S_1 और S_2 में से सिर्फ किसी एक के 8 विजेता खिलाड़ियों में से होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
25. यदि समुच्चय $\{1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ में से p तथा q पुर्नस्थापन के साथ यादृच्छिक चुने जाते है तो समीकरण $x^2 + px + q = 0$ के मूलों के वास्तविक होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

IIT-JEE-1996

26. तीन घटनाओं A, B तथा C के लिये, $P(A \text{ या } B \text{ में से ठीक एक घटना होगा}) = P(B \text{ या } C \text{ में से ठीक एक घटना होना}) = P(C \text{ या } A \text{ में से ठीक एक घटना होना}) = p$ तथा p (तीन घटनाएँ एक साथ होना) $= p^2$ जहां $0 < p < 1/2$ तब A, B, C में से कम से कम एक घटना होने की प्रायिकता है।
 (A) $\frac{3p + 2p^2}{2}$ (B) $\frac{p + 3p^2}{4}$ (C) $\frac{p + 3p^2}{2}$ (D) $\frac{3p + 2p^2}{4}$
27. 3 लड़कियाँ तथा 9 लड़कों को दो कारों में कितने प्रकार से बैठा सकते है जबकि प्रत्येक कार में सीटों पर नम्बर अंकित है 3 सामने तथा 4 पीछे। यदि तीन लड़कियां पीछे पंक्ति में एक साथ संलग्न सीटों पर बैठे तो कितने विन्यास संभव है अब यदि बैठने के सभी विन्यास समसम्भावी हो तो पीछे में तीन लड़कियों के साथ एक संलग्न सीटों पर बैठने की प्रायिकता क्या होगी ?

IIT-JEE-1995

28. वेस्टइंडीज के खिलाफ भारत के मैच जीतने की प्रायिकता 1/2 है। मैच दर मैच प्रायिकता को स्वतंत्र मानते हुए 5 मैचों की श्रृंखला में भारत की दूसरी जीत तीसरे टेस्ट मैच में होगी, की प्रायिकता है—
 (A) 1/8 (B) 1/4 (C) 1/2 (D) 1/3

29. एक समषट्भुज के छः शीर्षों में से तीन शीर्षों का चयन किया गया इन शीर्षों से बनने वाली त्रिभुज के समबाहु होने की प्रायिकता है—
 (A) $1/2$ (B) $1/5$ (C) $1/10$ (D) $1/20$
30. माना कि $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$ & $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$ तब
 (A) $P(B/A) = P(B) - P(A)$ (B) $P(A^c|B^c) = P(A^c) + P(B^c)$
 (C) $P((A \cup B)^c) = P(A^c) + P(B^c)$ (D) $P(A/B) = P(A)$

IIT-JEE-1994

31. एक निष्पक्षपाती पासा तब तक उछाला जाता है जब तक कि 4 से बड़ा अंक प्राप्त न हो जाये तब उछालों की संख्या सम आवश्यक होगी, की प्रायिकता है—
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{3}$
32. एक बक्से में 24 सर्वसम गेंदे हैं जिनमें से 12 सफेद तथा शेष काली है। गेंदे (एक बार में एक गेंद) यादृच्छिक बक्से से प्रतिस्थापन के साथ चुनी जाती है तब सातवें चयन में चौथी बार सफेद गेंद आने की प्रायिकता है—
 (A) $\frac{5}{64}$ (B) $\frac{27}{32}$ (C) $\frac{5}{32}$ (D) $\frac{1}{2}$
33. एक निष्पक्षपाती सिक्का उछाला जाता है यदि परिणाम शीर्ष आता है तब निष्पक्षपाती पांसों का एक युग्म उछाला जाता है तथा दोनों पांसों के ऊपरी फलक पर प्राप्त अंकों के योग को नोट किया गया। यदि परिणाम पुच्छ आता है तब अच्छी तरह मिलाये गये 11 ताशों की गड्डी से एक ताश निकाला जाता है जिन पर 2,3,4,.....,12 तक अंक अंकित है तथा ताश के अंक को नोट करते हैं तब नोट किये गये अंक के 7 या 8 होने की प्रायिकता है—
 (A) $\frac{193}{792}$ (B) $\frac{195}{792}$ (C) $\frac{191}{792}$ (D) इनमें से कोई नहीं
34. यदि दो घटनायें A तथा B इस प्रकार हो कि $P(A^c) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ तथा $P(AB^c) = 0.5$ तब $P[B/A \cup B^c] =$ _____.

.....
4-B (पूर्ववर्ती AIEEE/DCE परीक्षा प्रश्न)

35. निष्पक्षपाती पांसों का एक युग्म स्वतंत्र रूप से तीन बार उछाला जाता है तो अंकों का योग 9 दो बार की आने की प्रायिकता है—
 (A) $1/729$ (B) $8/9$ (C) $8/729$ (D) $8/243$
36. दो हवाई जहाज I और II एक लक्ष्य पर उत्तरोत्तर बम गिराते हैं उनके द्वारा सही जगह बम दागने की प्रायिकताएं क्रमशः 0.3 व 0.2 हैं दूसरा हवाई जहाज बम गिराता है यदि प्रथम जहाज अपने निशाने को चूकता है तब लक्ष्य के दूसरे जहाज द्वारा भेदने की प्रायिकता है —
 (A) 0.06 (B) 0.14 (C) 0.32 (D) 0.7
37. एक टेलिफोन पूछताछ केन्द्र पर संबंधित पूछताछ 'कॉल' पॉइसन वितरण में 10 मिनट के अंतराल में औसत 5 कॉल है। 10 मिनट के अंतराल में अधिकतम एक कॉल आने की प्रायिकता है —

- (A) $\frac{5}{6}$ (B) $\frac{6}{55}$ (C) $\frac{5}{e^5}$ (D) $\frac{6}{5^e}$

38. माना कि A तथा B दो घटनायें इस प्रकार है कि $P(\overline{A \cup B}) = \frac{1}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ तथा $P(\overline{A}) = \frac{1}{4}$, जहां \overline{A} घटना A की पूरी घटना की प्रदर्शित करता है, तब घटनायें A तथा B है।
 (A) परस्पर अपवर्जी तथा स्वतंत्र (B) स्वतंत्र लेकिन समसम्भावी नहीं
 (C) समसम्भावी लेकिन स्वतंत्र नहीं (D) समसम्भावी और परस्पर अपवर्जी

39. एक कॉलोनी में तीन घर है। तीन व्यक्ति इनके लिसे आवेदन करते है। प्रत्येक व्यक्ति दूसरे को बिना बताये आवेदन करते है। तीनों व्यक्तियों द्वारा एक ही घर के लिये आवेदन करने की प्रायिकता है—
 (A) 7/9 (B) 8/9 (C) 1/9 (D) 2/9

40. एक यादृच्छिक चर X पॉइसन वितरण में है जिसका समान्तर माध्य 2 है, तब $P(X > 1.5)$ बराबर है—
 (A) $\frac{3}{e^2}$ (B) $1 - \frac{3}{e^2}$ (C) 0 (D) $\frac{2}{e^2}$

41. A के सत्य बोलने की प्रायिकता 4/5 है जबकि B के सत्य बोलने की प्रायिकता 3/4 है तो एक घटना पर उनके परस्पर विरोध की प्रायिकता है—
 (A) 3/20 (B) 1/5 (C) 7/20 (D) 4/5

42. एक यादृच्छिक चर X निम्न प्रायिकता वितरण रखता है।

X:	1	2	3	4	5	6	7	8
P(X):	0.15	0.23	0.12	0.10	0.20	0.08	0.07	0.05

- घटना $E = \{X \text{ एक अभाज्य संख्या है}\}$ के लिये तथा $F = \{X < 4\}$, तब $P(E \cup F)$ की प्रायिकता है —
 (A) 0.87 (B) 0.77 (C) 0.35 (D) 0.50

43. एक द्विपद वितरण में समान्तर माध्य तथा प्रसरण क्रमशः 4 तथा 2 है तब 2 सफलताओं की प्रायिकता है—
 (A) $\frac{37}{256}$ (B) $\frac{219}{256}$ (C) $\frac{128}{256}$ (D) $\frac{28}{256}$

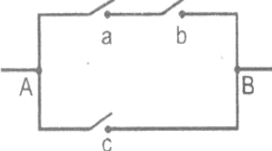
44. x के 15 प्रेक्षणों के एक प्रयोग में, निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होते है। $\Sigma x^2 = 2830$, $\Sigma = 170$ एक प्रेक्षण जो 20 था, गलत पाया गया तथा उसे सही मान 30 से प्रतिस्थापित किया गया, तब सही प्रसरण है—
 (A) 78.00 (B) 188.66 (C) 177.33 (D) 8.33

45. एक घुड़दौड़ में 5 घोड़े है। A उनमें से दो घोड़ों को यादृच्छिक चुनता है तथा उन पर शर्त लगाता है। तब A द्वारा जीतने वाले घोड़े के चयन की प्रायिकता है —
 (A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

46. A, B, C तीन परस्पर अपवर्जी घटनायें इस प्रकार है कि $P(A) = \frac{3x+1}{3}$, $P(B) = \frac{1-x}{4}$ तथा $P(C) = \frac{1-2x}{2}$ तब x के संभव मान अंतराल में है—

- (A) $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ (B) $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ (C) $\left[\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right]$ (D) $[0, 1]$

47. एक यादृच्छिक चर x का द्विपद तवरण में समान्तर माध्य तथा प्रसरण क्रमशः 4 तथा 2 है, तब $P(X = 1)$ है—
 (A) $\frac{1}{32}$ (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{4}$
48. एक आयतीय षट्भुज के 6 शीर्षों में से 3 शीर्ष यादृच्छिक चुने जाते हैं, तब इन शीर्षों से बनने वाले त्रिभुज के समबाहु त्रिभुज होने की प्रायिकता है —
 (A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{10}$
49. एक द्विपद वितरण में समान्तर माध्य तथा प्रसरण क्रमशः 4 व 3 है, तब ठीक 6 सफलताओं की प्रायिकता है —
 (A) ${}^{16}C_9 \left(\frac{1}{4}\right)^{16} \left(\frac{3}{4}\right)^{20}$ (B) ${}^{16}C_6 \left(\frac{1}{4}\right)^8 \left(\frac{3}{4}\right)^{12}$ (C) ${}^{16}C_6 \left(\frac{1}{4}\right)^{16} \left(\frac{3}{4}\right)^{20}$ (D) ${}^{16}C_6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$
50. A की प्रायिकता B की प्रायिकता = C की प्रायिकता = $\frac{1}{4}$ तथा $P(AB) = P(CB) = 0$ और $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, तब $P(A+B)$ बराबर है—
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{37}{64}$ (D) $\frac{5}{8}$
51. एक पासा तीन बार उछाला जाता है। यदि सम संख्या प्राप्त होना एक सफलता है, तब कम से कम दो सफलताओं की प्रायिकता है—
 (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{1}{2}$
52. $x = 33^n$ में n एक धनात्मक पूर्णांक है, तब x का इकाई अंक 3 होने की प्रायिकता है —
 (A) $1/5$ (B) $1/4$ (C) $1/3$ (D) $1/2$
53. यदि $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ तथा $P(A) = \frac{1}{2}$ तब निम्न में से सत्य है—
 (A) $P(A) = P(B)$ (B) A व B परस्पर अपवर्जी घटनायें हैं
 (C) A तथा B स्वतंत्र घटनायें हैं। (D) $P(A) < P(B)$
54. एक बैग A में 4 हरी, 3 लाल गेंदे हैं और बैग में 4 लाल तथा 3 हरी गेंदे हैं। एक बैग यादृच्छिक चुना गया तथा एक गेंद निकाली गई तथा नोट किया गया कि गेंद हरी है, तब इसके बैग B से आने की प्रायिकता है —
 (A) $2/7$ (B) $2/3$ (C) $3/7$ (D) $1/3$

55. दिये परिपथ पर  विचार कीजिये

यदि प्रत्येक स्विच (बटन) बन्द होने की प्रायिकता p है, तब परिपथ प्रवाह AB द्वारा होने की प्रायिकता है —
 (A) $p^2 + p$ (B) $p^3 + p - 1$ (C) $p^3 + p$ (D) $p^2 + p + 1$

56. 2 कोटी के सभी सरणिकों के एक समुच्चय जिनके अवयव केवल 0 तथा 1 है, एक सारणिक यादृच्छिक चुना जाता है। चुने गये सारणिक के अशून्य होने की प्रायिकता है –
- (A) $\frac{3}{16}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) इनमें से कोई नहीं

Answers

EXERCISE # 1 – A

1. C 2. B 3. A 4. A 5. A 6. D 7. C
 8. D 9. D 10. C 11. A 12. A 13. A 14. C
 15. A 16. C 17. C 18. C 19. B 20. D
 21. AC 22. ACD 23. CD 24. BCD 25. AB

EXERCISE # 1-B

1. (i){HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT }
 (ii){B₁ B₂, B₁ B₃, B₁ G₁, B₁ G₂, B₂, B₃, B₂ G₁,

B₂ G₂, B₃ G₁, B₃ G₂, G₁ G₂}

2. $\frac{1}{72}$ 3- $\frac{1}{132}$ 4. $\frac{1}{6}$ 5. $\frac{4}{5}$

6. (i) $\frac{4}{15}$ (ii) $\frac{7}{15}$ 7. 43 to 34

8. (a) NO (b) No 9. 2/11

10. (i) $\frac{29}{36}$ (ii) 1/18

11. (i) 0.72 (ii) 1/3 (iii) 0.28

12. (i) $\frac{2}{13}$ (ii) $\frac{4}{13}$ 13. $\frac{35}{136}$ 14. 952 to 715

15. $\frac{52}{77}$ 16. $\frac{16}{37}, \frac{12}{37}, \frac{9}{37}$ 17. $\frac{45927}{50000}$

18. 10 paise 19. 28 paise 20. $\frac{17}{125}$

21. (i) $\frac{27}{56}$ (ii) $\frac{8}{29}$ 22. $\frac{1}{17}$

23.

Xi	0	1	2	3
Pi	$\left(\frac{19}{25}\right)^3$	$18 \times \frac{19^2}{25^3}$	$108 \times \frac{19}{25^3}$	$\frac{216}{25^3}$

24. $\frac{40}{41}$ 25. means = 2.5, variance = 1.25

26. $\frac{48}{25\pi}$

EXERCISE # 2-A

1. A 2. B 3. B 4. A 5. B 6. D 7. A

8. B 9. D 10. C 11. A 12. C 13. A 14. C EXERCISE # 4

15. D 16. B 17. C 18. ABCD 19. ABD

20. AC 21. AD

EXERCISE # 2-B

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{5}{11}$ 4. 240 and 40

5. $1 - \{1 - (1 - p)^m\}^k$ 6. (32/41) 7. 11/50

EXERCISE # 3

1. (A) → (q), (B) → (r), (C) → (r), (D) → (r)

2. (A) → (s), (B) → (r), (C) → (q), (D) → (p)

3. A 4. D 5. A 6. B 7.1 A 7.2 C 7.3 D

8.1 B 8.2 B 8.3 D 9. False 10. True

11. True 12. False Correct Ans. $\frac{1}{5}$ 13. True

14. $\frac{1}{6}$ 15. $\frac{7}{15}$ 16. $\frac{3}{55}$ 17. $\frac{625}{3888}$

18. 117/125

1. B 2. D 3. C 4. B 5. C 6.1 A 6.2 A

6.3 C 7. A 8.1/7 9.D

11.
$$\frac{{}^6C_{14} \times {}^{12}C_2 \times {}^2C_1 \times {}^{10}C_1 \times {}^6C_5 \times {}^{12}C_1 \times {}^{11}C_1}{{}^{12}C_2 ({}^6C_4 \times {}^{12}C_2 \times {}^6C_5 \times {}^{12}C_1 \times {}^6C_6)}$$

12. (a) A (b) D 13. (a) $2P^2 - P^3$ (b) $\frac{1}{2}$

14. $\frac{9m}{8N+m}$ 15. $\frac{m}{m+n}$ 16. $\frac{{}^6C_3 [3^n - 3(2^n) + 3]}{6^n}$

18. A 19. (a) C (b) BC 20. 4/35

21. (i) B (ii) A (iii) A (iv) B (v) D

22. $\alpha = \frac{p}{1 - (1-p)^3}, \beta = \frac{(1-p)p}{9 - (1-p)^3}, \gamma = \frac{(1-p)^2 p}{1 - (1-p)^3}$

23. 11/40 24. (a) 1/2 (b) 8/15 25. 31/50

26. A 27. ${}^{14}P_{12}, 4 \cdot 3! \cdot {}^{11}P_9, 1/91$ 28. B 29. C

30. D 31. B 32. C 33. A 34. 0 .25

35. D 36. C 37. C 38. B 39. C

40. B 41. C 42. B 43. D 44. A 45. D 46. A

47. A 48. A 49. A 50. D 51. D 52. B 53. C

54. C 55. A 56. B

MQB

EXERCISE # (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. दक्षिण अफ्रीकी क्रिकेट टीम का कप्तान 14 में से 13 बार सिक्का उछालने पर हारता है तो ऐसा होने की संभावना है –

- (A) $\frac{7}{2^{13}}$ (B) $\frac{1}{2^{13}}$ (C) $\frac{13}{2^{14}}$ (D) $\frac{13}{2^{13}}$

2. पासों के एक युग्म को फैंकने पर, अंकों का योग 8 हो लेकिन 11 नहीं, हो, आने की प्रायिकता है –

- (A) $\frac{5}{36}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{2}{36}$ (D) $\frac{1}{9}$
3. 3 स्वतंत्र परिक्षणों की एक श्रेणी में ठीक 2 सफलताओं की प्रायिकता 3 सफलताओं की प्रायिकता से 12 गुणा ज्यादा है, तो प्रत्येक परीक्षण में सफलता की प्रायिकता है –
 (A) $1/5$ (B) $2/5$ (C) $3/5$ (D) $4/5$
4. दो पात्र, जिसमें प्रथम में m सफेद और n काली तथा द्वितीय में p सफेद तथा q काली गेंदे हैं। प्रथम पात्र से एक गेंद निकालकर द्वितीय पात्र में रखी जाती है तो द्वितीय पात्र में से एक सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता है—
 (A) $\frac{pm + (p+1)n}{(m+n)(p+q+1)}$ (B) $\frac{(p+1)m + pn}{(m+n)(p+q+1)}$ (C) $\frac{qm + (q+1)n}{(m+n)(p+q+1)}$ (D) $\frac{(q+1)m + qn}{(m+n)(p+q+1)}$
5. पात्र A में 6 लाल और 4 काली गेंदे हैं और पात्र B में 4 लाल व 6 काली गेंदे हैं। पात्र A में से यादृच्छिक रूप से एक गेंद निकालकर पात्र B में रखते हैं अब पात्र B से एक गेंद यादृच्छिक रूप से निकालकर पात्र A में रखते हैं। अब पात्र A में से एक गेंद निकाली जाती है तो इसके लाल होने वाली प्रायिकता है –
 (A) $\frac{19}{55}$ (B) $\frac{32}{55}$ (C) $\frac{41}{55}$ (D) $\frac{9}{55}$
6. एक धनात्मक संख्या की चतुर्थ घात का इकाई अंक 6 होने की प्रायिकता है—
 (A) 10% (B) 20% (C) 25% (D) 40%
7. पात्र –II में 5 लाल व 4 नीले गेंदें हैं जबकि पात्र –II में 4 लाल व 2 नीली गेंदे हैं। एक निष्पक्षपाती पासा फेंका जाता है। यदि 3 का गुणज आता है तो पात्र –I में से एक गेंद निकाली जाती है अन्यथा पात्र –II में से एक गेंद निकाली जाती है। यदि निकाली गई गेंद नीली है, तो इसके पात्र –I में से होने की प्रायिकता है –
 (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{15}{19}$ (C) $\frac{4}{19}$ (D) $\frac{2}{5}$
8. एक सैर-सपाटे की यात्रा में 20 व्यक्तियों में केवल 2 महिलाएँ हैं। 20 व्यक्तियों को 10-10 के दो समूहों में विभाजित किया जाता है, तो दोनों महिलाओं के समान समूह में होने की प्रायिकता है—
 (A) $9/19$ (B) $9/38$ (C) $9/35$ (D) इनमें से कोई नहीं
9. एक समुच्चय A जिसमें तीन भिन्न-भिन्न अवयव हैं के सभी प्रतिचित्रणों में से एक प्रतिचित्रण यादृच्छिक चुना जाता है तो इस प्रतिचित्रण के ऐकैकी होने की प्रायिकता है—
 (A) $1/9$ (B) $1/3$ (C) $1/4$ (D) $2/9$
10. एक शब्दकोश जिसके तीन भाग हैं, 40 पुस्तकों के साथ एक दराज में यादृच्छिक रूप से व्यवस्थित है। तो इन भागों के वृद्धिमान क्रम में बाये से दायें व्यवस्थित होने की प्रायिकता है (जबकि भागों का एक के बाद एक होना आवश्यक नहीं है।)
 (A) $1/3$ (B) $1/6$ (C) $1/9$ (D) इनमें से कोई नहीं
11. 5 लड़कियां तथा 10 लड़के एक पंक्ति में यादृच्छिक रूप से 1 से 15 तक नामांकित कुर्सियों पर बैठते हैं, तब अंतिम कुर्सी पर लड़की बैठने तथा दो लड़कियों के बीच में विषम संख्या में लड़कों के बैठने की प्रायिकता है—
 (A) $\frac{20 \times 10 \times 5!}{15!}$ (B) $\frac{10 \times 10 \times 5!}{15!}$ (C) $\frac{20 \times 10 \times 30!}{15!}$ (D) $\frac{10 \times 10 \times 5!}{25!}$
12. यदि 4 पूर्ण संख्याएँ यादृच्छिक लेकर उनका गुणनफल निकाला जाता है तब उनके गुणनफल का अंतिम अंक 1, 3, 7 या 9 आने की प्रायिकता है—
 (A) $16/625$ (B) $4/125$ (C) $8/81$ (D) इनमें से कोई नहीं

13. घटनाओं $A \cap B, A, B$ और $A \cup B$ की प्रायिकताएँ क्रमशः समान्तर श्रेणी में हैं जिसका द्वितीय पद सार्वअंतर के बराबर है।
 अतः A और B
 (A) परस्पर अपवर्जी है।
 (B) स्वतंत्र है।
 (C) इस प्रकार है कि उनमें से एक जरूर घटित होती है।
 (D) इस प्रकार है कि एक के घटित होने की सम्भावना दूसरी से दुगुनी है।
14. एक थैले में चार टिकट हैं जिन पर संख्याएँ 112, 121, 211, 222 अंकित हैं। थैले में से एक टिकट को यादृच्छा निकाला जाता है। माना घटना $E_i (i = 1, 2, 3)$ टिकट पर i वां अंक 2 होना प्रदर्शित करता है, तो –
 (A) E_1 और E_2 स्वतंत्र है। (B) E_2 और E_3 स्वतंत्र है। (C) E_3 और E_1 स्वतंत्र है। (D) E_1, E_2, E_3 स्वतंत्र है
15. एक विधार्थी को तीन ऐतिहासिक घटनाओं का मिलान करना है। अर्थात् दाण्डी यात्रा भारत छोड़ो आंदोलन और महात्मा गाँधी जी की हत्या का 1948, 1930 व 1942 के साथ। विद्यार्थी को सही उत्तर का कोई ज्ञान नहीं है तथा वह उनको यादृच्छिक रूप से मिलाने का निर्णय लेता है। मानाकि $E_i : (0 \leq i \leq 3)$ विद्यार्थी द्वारा ठीक i सही उत्तर पाने की घटना को प्रदर्शित करता है तब—
 (A) $P(E_0) + P(E_3) = P(E_1)$ (B) $P(E_0) \cdot P(E_1) = P(E_3)$
 (C) $P(E_0 \cap E_1) = P(E_2)$ (D) $P(E_0) + P(E_1) + P(E_3) = 1$
16. $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ में से तीन अंक बिना पुनर्स्थापन के यादृच्छिक रूप से चुने जाते हैं। चुने हुए अंकों में न्यूनतम अंक 3 या अधिकतम अंक 7 आने की प्रायिकता है –
 (A) $\frac{11}{40}$ (B) $\frac{9}{40}$ (C) $\frac{{}^7C_2 + {}^6C_2 - 3}{{}^{10}C_3}$ (D) इनमें से कोई नहीं

EXERCISE # 2 (विषयात्मक प्रश्न)

1. तीन पासों को एक साथ फेंकने पर अंकों का योग आठ आने की प्रायिकता ज्ञात करो।
2. 6 लड़के तथा 6 लड़कियाँ एक पंक्ति में यादृच्छिक बैठे हैं तो लड़के तथा लड़कियों के एकान्तर क्रम में बैठने की प्रायिकता ज्ञात करो।
3. माना कि A तथा B स्वतंत्र रूप से एक लक्ष्य को तब तक निशाना साधते हैं जब तक कि वे उनके लक्ष्य को भेद नहीं देते। प्रत्येक निशाने में उनके लक्ष्य को भेदने प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{3}{5}$ व $\frac{5}{7}$ हो तब B को लक्ष्य भेदने के लिए A से अधिक प्रयासों की आवश्यकता होगी, की प्रायिकता ज्ञात करो।
4. एक निर्माण कार्य में सभी सामग्री सही समय पर पहुँचाने की घटना M है तथा निर्माण कार्य सही समय पर पूरा होने की घटना F है। दिया है $P(M) = 0.8$ तथा $P(M \cap F) = 0.65$ यदि $P(F) = 0.7$, तब निर्माण कार्य के सही समय पर होने की प्रायिकता ज्ञात करो यदि सभी सामग्री सही समय पर नहीं पहुँचाई गई है।
5. A तथा B दो पासे फेंकते हैं यदि A , 9 फेंकता है तो B के ज्यादा अंक आने की सम्भावना ज्ञात कीजिए।
6. ऐसी भी द्विघात समीकरणों के समुच्चय में से एक द्विघात समीकरण का चयन किया जाता है जिनमें कि मूलों का वर्ग करने पर समीकरण अपरिवर्तनीय है। इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि चयनित समीकरण के मूल समान हों।
7. तीन स्वतंत्र आलोचकों द्वारा एक पुस्तक का अनुकूल पुनरीक्षण करने के संयोगानुपात क्रमशः 5 : 2, 4 : 3 और 3 : 4 है। तीनों पुनरीक्षणों में से अनुकूल बहुत होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
8. एक सिक्का n बार बछाला जाता है, इस सिक्के पर विषम बार शीर्ष आने की क्या सम्भावना होगी ?
9. एक शिकारी जानता है कि एक हिरण पास की दो झाड़ियों में से एक में छिपा है, हिरण के झाड़ी A में छिपने की प्रायिकता $4/5$ है। शिकारी के पास एक 10 गोलीयों की राइफल है वह सारी गोलियां झाड़ी $-I$ या झाड़ी $-II$ पर दागने पर निर्णय लेता है। यह ज्ञात है कि प्रत्येक गोली एक या दोनों झाड़ियों को स्वतंत्र रूप से भेद कसती है। जिसकी प्रायिकता $1/2$ है। तब ज्ञात कीजिए कि वह कितनी गोलियां प्रत्येक झाड़ी पर दागे ताकि जानवर को गोली लगने की प्रायिकता अधिकतम हो।

10. एक पर्ची एक व्यक्ति A को दी जाती है जोकि एक (+ve) या (-ve) का चिन्ह अंकित करता है उसके (+ve) चिन्ह लिखने की प्रायिकता $1/3$ हो, A पर्ची को B को देता है जो कि C को देने से पहले उसे खाली छोड़ता है या उसका चिन्ह बदलता है इसी प्रकार C, D को देता है तथा D उस पर्ची को निर्णायक को देता है जो कि पर्ची पर (+ve) चिन्ह पाता हो यदि यह ज्ञात हो कि B, C तथा D प्रत्येक चिन्ह को $2/3$ प्रायिकता के साथ बदलता है तब प्रायिकता ज्ञात करो कि A ने मूलतः (+) चिन्ह लिखा।

11. शब्द "PROBABILITY" के अक्षरों को एक पंक्ति में यादृच्छिक रूप में लिखा जाता है। मानाकि E_1 दो 'I' के साथ होने की घटना और E_2 दो 'B' के साथ होने की घटना हो, तब स्तम्भ I तथा स्तम्भ II का मिलान कीजिए।

स्तम्भ I	स्तम्भ II
(A) $P(E_1) = P(E_2) =$	(p) $2/55$
(B) $P(E_1 \cap E_2) =$	(q) $2/11$
(C) $P(E_1 \cup E_2) =$	(r) $1/5$
(D) $P(E_1/E_2) =$	(s) $18/55$

12. यदि $P(A) = \frac{3}{5}$ और $P(B) = \frac{2}{3}$ तब स्तम्भ I का स्तम्भ II से मिलान कीजिए।

स्तम्भ I	स्तम्भ II
(A) $P(A \cap B)$	(p) $\left[\frac{2}{5}, \frac{9}{10}\right]$
(B) $P(A \cup B)$	(q) $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$
(C) $P(A/B)$	(r) $\left[0, \frac{1}{3}\right]$
(D) $P(A \cap B')$	(s) $\left[\frac{4}{15}, \frac{3}{5}\right]$

13. A' 60% स्थितियों में सत्य बोलता है और B, 90% स्थितियों में सत्य बोलता है। कितने प्रतिशत स्थितियों में समान तथ्य पर बोलते हुए दोनों विरोधाभासी स्थिति में होंगे ?

14. एक प्रश्न को स्वतंत्र रूप में हल करने की A और B की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ है। यदि दोनों स्वतंत्र रूप से प्रश्न को हल करने की कोशिश करते हैं, तो
 (i) प्रश्न के हल होने की प्रायिकता ज्ञात करो।
 (ii) उनमें से ठीक के द्वारा हल करने की प्रायिकता ज्ञात करो।

15. एक प्रश्न पत्र में 10 बहु वैकल्पिक प्रश्न हैं (4 विकल्पों में से 1 या एक से अधिक सही हो सकते हैं) एक छात्र यादृच्छिक रूप उत्तर देने का निर्णय करता है, तो उसके ठीक दो प्रश्न सही होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

16. एक थैले में एक रूपये 2 और 2 रूपये के तीन सिक्के हैं। एक व्यक्ति थैले में से 2 सिक्के निकलाता है, तो उसकी उम्मी का मान ज्ञात करो।

17. पॉल का माली भरोसे योग्य नहीं है। इस बात की प्रायिकता है कि गुलाब के पौधों को पानी देना भूज जाएगा $\frac{2}{3}$ है। गुलाब के पौधे संदेहात्मक स्थिति में हैं, यदि पानी दिया जाता है तो उकने मुझाने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है और यदि पानी नहीं दिया जाता है तो उनके मुझाने की प्रायिकता $\frac{3}{4}$ है। पॉल कुछ दिनों के लिए बाहर जाता है और वापस लौटने पर वह पाला है कि गुलाब के पौधे गुर्जा गये हैं, तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि माली ने पौधों को पानी नहीं दिया है। [यहाँ पमरणाम ज्ञात है कि पौधे मुर्जा चुके हैं अतः बेज प्रमेय का उपयोग करना चाहिए]

18. ताश के पत्तों की एक गड्डी को उल्टा करके गिना जाता है और एक पत्ता गायब मिलता है। एक पत्ता खींचा जाता है और यह पत्ता लाल मिलता है तो गायब पत्ते के लाला होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
19. एक संख्या यादृच्छिक रूप से निम्न समुच्चयों में से एक में से चुनी जाती है।
A : {1801, 1802, 1899, 1990} B: (1901, 19002, 1999, 2000)
यदि चुनी गई संख्या एक वर्ष को प्रदर्शित करती है तो उसके 53 रविवार होने की प्रायिकता ज्ञात करो।
20. एक घन के परिगत एक गोला बनाया जाता है। तो गोले के अंदर स्थित एक बिन्दु के घन के बाहर स्थित होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
21. एक सामान्य गड्डी में से चार व्यक्ति एक-एक पत्ता निकालते हैं तो सम्भावना ज्ञात करो। (1) प्रत्येक प्रकार का एक पत्ता हो (2) कोई भी दो पत्ते समान मान के न हों।
22. एक बल्ब के एक वर्ष पश्चात् खराब होने की प्रायिकता 0.1 है तो प्रायिकता ज्ञात करो कि इस प्रकार के 4 बल्बों में से
(i) एक भी नहीं (ii) 3 से ज्यादा (iii) 3 से ज्यादा नहीं
एक वर्ष पश्चात् खराब होंगे।
23. प्रत्येक खेल में पिछले खेल विजेता के पक्ष में संयोगानुपात 2 : 1 है तो प्रथम खेल जीतने वाले खिलाड़ी के अगले चार खेलों में से कम से कम तीन जीतने की संभावना ज्ञात कीजिए।
24. A, 6 में से घोड़ा है जो कि दौड़ में प्रवेश करते हैं तथा जो कि B और C में से एक घुड़सवार द्वारा दौड़ाया जाता है। B द्वारा A को दौड़ाने के संयोगानुपात 2 : 1 है। इस्थिति में सभी घोड़ों की जीतने की संभावनाएँ समान हैं यदि C, A को दौड़ाये तो उसकी संभावना तिगुनी है तब दाके जीतने के प्रतिकूल संयोगानुपात ज्ञात कीजिए।
25. एक थैले में चार गेंदे हैं परन्तु उनका रंग ज्ञात नहीं है। एक गेंद निकाली जाती है तथा सफेद प्राप्त होती है तो सभी गेंदों के सफेद होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
26. पासों के एक युग्म के 5 बार उछाला जाता है। दोनों पर समान अंक आने की प्रायिकता वितरण का माध्य व प्रसरण ज्ञात कीजिए।
27. एक जुआरी की जेब में एक रूपया है। वह एक निष्पक्षघाती साधारण सिक्के को तब तक उछालता है जब तक या तो वह हार ना जाये या अधिकतम पांच बार। यदि प्रत्येक शीर्ष के लिए वह एक रूपया जीतता है, तथा प्रत्येक पुच्छ के लिए वह एक रूपया हारता है तो जुआरी के हारने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
28. दिये गये 3 पत्तों में एक पत्ता दोनों तरफ लाल, एक पत्ता दोनों तरफ नीला तथा एक पत्ता एक तरफ नीला तथा दूसरी तरफ लाल है। इनमें से एक यादृच्छिक चुना जाता है तथा मेज पर रखा जाता है। यह उपरी ओर लाल रंग दर्शाता है। दूसरी ओर लाल रंग होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
29. एक प्रयोग के 10 परीक्षण में यदि '4 सफलतायें' प्राप्त करने की प्रायिकता अधिकतम है तो दिखाइए कि प्रत्येक परीक्षण में असफलता प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{3}{5}$ के बराबर होगी।
30. दो लॉट में समान वस्तुएं हैं जो कि अलग-अलग प्रकार की तथा दोषयुक्त हैं। यहां प्रथम लॉट में N वस्तुएं हैं, जिनमें से n दोषयुक्त हैं तथा द्वितीय लॉट में M वस्तुएं हैं जिनमें से m दोषयुक्त हैं। प्रथम लॉट में से K तथा द्वितीय लॉट में से L वस्तुएं निकाली जाती हैं तथा एक नया लॉट बनाया जाता है। नये लॉट में से एक वस्तु के यादृच्छिक निकालने पर इसके दोषयुक्त पाये जाने की प्रायिकता ज्ञात करो।
31. 3 पासों को एक बार फैंकने पर ठीक 10 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
32. दो खिलाड़ी A तथा B जो कि समान रूप से चतुर हैं, खेलों को खेल रहे हैं। जब A को 3 तथा B को 2 अंक मिल जाते हैं। तो वे खेलना बंद कर देते हैं। यदि उनका यह दौ व 16 रू का है, तो प्रत्येक को कितना हिस्सा मिलेगा घ

33. व्यक्ति P व्यक्ति Q से 8 रु. पर 120 रु. की शर्त लगाता है कि तीन दौड़े तीन घोड़ों A,B,C के द्वारा जीती जायेगी। जिनके विपक्ष में शर्त क्रमशः 3 पर 2, 4 पर 1 तथा 2 पर 1 है। प्रथम दौड़ A द्वारा जीती जाती है और यह ज्ञात है कि द्वितीय दौड़ या तो घोड़े B या एक घोड़े D द्वारा जीती जाती है जिसके विपक्ष में शर्त 2 पर 1 है। तो P की आकांशा का मान ज्ञात करो।
34. एक परिवार में 3 बच्चे है। परिवार में अधिकतम एक लड़का होने की घटना 'A' है, परिवार में कम से कम लड़का होने की घटना 'B' है और परिवार में अधिकतम 1 लड़की होने की घटना 'C' है। ज्ञात कीजिए कि घटनाएँ 'A' और 'B' स्वतंत्र है या नहीं। यह भी ज्ञात कीजिए कि A,B,C स्वतंत्र है या नहीं।
35. एक रेखाखण्ड जिसकी लम्बाई a है। इस रेखाखण्ड को यादृच्छिक रूप से उस पर स्थिति किसी बिन्दु के सापेक्ष दो टुकड़ों में बांट दिया जाता है। इस बात की प्रायिकता ज्ञात करें कि कोई भी खण्ड b से बड़ा न हो, जहाँ $2b > a$.

Answers

EXERCISE # 1

1. A 2. A 3. A 4. B 5. B 6. D 7. D 16. Rs . 3.20 17. $\frac{3}{4}$ 18. $\frac{25}{51}$ 19. $\frac{249}{1400}$
 8. A 9. D 10. B 11. A 12. A 13. AD 20. $1 - \frac{2}{\pi\sqrt{3}}$ 21. (i) $\frac{2197}{20825}$ (ii) $\frac{{}^{13}C_4 \times 4^4}{{}^{52}C_4}$
 14. ABC 15. ABCD 16. AC

EXERCISE # 2

1. $\frac{7}{72}$ 2. $\frac{1}{462}$ 3. $\frac{6}{31}$ 4. $\frac{1}{4}$ 5. $\frac{1}{6}$ 22. (i) $\frac{9^4}{10^4}$ (ii) $\frac{1}{10^4}$ (iii) $\frac{9999}{10000}$ 23. $\frac{4}{9}$
 6. $\frac{1}{2}$ 7. 209/343 8. 1/2 24. 13 to 5 25. $\frac{2}{5}$
 9. 6 on bush A and 4 on bush B 26. mean = $\frac{5}{6}$, variance = $\frac{25}{36}$ 27. $\frac{11}{16}$
 10. $\frac{13}{41}$ 28. $\frac{2}{3}$ 30. $\frac{KnM + LmN}{MN(K + L)}$ 31. 1/8
 11. (A) → (q), (B) → (p), (C) → (s), (D) → (r) 32. 5 Rs. & 11 Rs. 33. Rs. 8
 12. (A) → (s), (B) → (q), (C) → (p), (D) → (r) 34. A + B are mid of each other but A, B and C are not.
 13. 42% 14. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ 15. ${}^{10}C_2 \cdot \frac{(14)^8}{15^{10}}$ 35. $\frac{2b - a}{a}$

for 39 Yrs. Que. of IIT-JEE

&

15 Yrs. Que. of AIEEE

we have distributed already a book