

विध्न विचारत भीरु जन, नहीं आरम्भे काम,
 विपति देख छोड़े तुरंत मध्यम मन कर श्याम।
 पुरुष सिंह संकल्प कर, सहते विपति अनेक,
 'बना' न छोड़े ध्येय को, रघुबर राखे टेक।।

रचित: मन्मथ धर्म प्रणेता

सद्गुरु श्री रणछोड़दासजी महाराज

फलन की सीमा (Limit of function)

.....
Even as the finite encloses an infinite series and in the unlimited limits appear, So the soul of immensity dwells in minutia and in the narrowest limits no limit in here. What joy to discern the minute in infinity ! The vast to perceive in the small, what divinity !.....Barnoulli gacob, Ars Conjectandi

परिभाषा (Definition): फलन $f(x)$ की सीमा विद्यमान है, $x \rightarrow a$ जब

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(a-h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(a+h)$$

(बांयी सीमा) (दांयी सीमा)

ध्यान रखें कि हम इस बात की जानकारी नहीं चाहते हैं कि $x=a$ पर क्या होता है और यह भी ध्यान रखें कि बांयी सीमा और दांयी सीमा ' ∞ ' या ' $-\infty$ ' की ओर अग्रसार हो रही है तो इसे अनन्त सीमा कहा जाता है
 ध्यान रखें $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

सीमाओं की मूलभूत प्रमेय (Fundamental theorems on limits):

माना $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ और $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$. यदि l और m परिमित हो, तो—

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \neq g(x)\} = l \neq m$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x).g(x)\} = lm$.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$, जबकि $m \neq 0$
- (iv) $\lim_{x \rightarrow a} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$; जहाँ k नियतांक है।
- (v) $\lim_{x \rightarrow a} f[g(x)] = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(m)$; जबकि $g(x) = m$ पर f सतत् है।

अनिर्धार्य रूप (indeterminate forms)रूप

यदि $f(x)$ में $x=a$ रखने पर $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, \infty^0, 0^0, 1^\infty$ में से कोई रूप प्राप्त होता है, तो सीमा एक अनिर्धार्य रूप

कहलाती है। उपरोक्त सभी रूप आपस में रूपान्तरित हैं अर्थात् एक रूप को उपयुक्त प्रतिस्थापन द्वारा दूसरे रूप में बदला जा सकता है।

इन स्थितियों में $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ विद्यमान हो सकती है।

माना $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ जहां $\lim_{x \rightarrow a} x^2 - 4 = 0$ तथा $\lim_{x \rightarrow 2} x - 2 = 0$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ एक $\frac{0}{0}$ रूप वाला अनिर्धार्य रूप कहलाता है।

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$, $\frac{\infty}{\infty}$ रूप वाला अनिर्धार्य रूप है।

$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$, 1^∞ रूप वाला अनिर्धार्य रूप है।

नोट : (i) $\infty + \infty = \infty$

(ii) $\infty \times \infty$

(iii) $(a/\infty) = 0$, ; यदि a परिमित है

(iv) $\frac{a}{0}$ परिभाषित नहीं है $\forall a \in \mathbb{R}$.

(v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x}$ अनिर्धार्य रूप है जबकि $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x^2]}{x^2}$ अनिर्धार्य रूप नहीं है।

उपरोक्त रूपों को विद्यार्थी 'अग्रसार हो' को पूर्वलग्न के रूप में याद रखेंगे।

अर्थात् $\frac{\text{शून्य की ओर अग्रसर हो}}{\text{शून्य की ओर अग्रसर हो}}$ एक अनिर्धार्य रूप है जबकि $\frac{\text{ठीक शून्य}}{\text{शून्य की ओर अग्रसर हो}}$ अनिर्धार्य रूप नहीं है।
 (इसका मान शून्य है।)

सीमा ज्ञात करने के लिए हमें सदैव x' का वह मान रखना चाहिए जो फलन की ओर अग्रसर हो। यदि हमें कोई निर्धारित मान प्राप्त होता हो, तो वह मान उस फलन की सीमा होत है अन्यथा यदि अनिर्धार्य रूप प्राप्त होता है, तो हमें अनिर्धार्य रूप को हटाना होत है, जब एक बार अनिर्धार्य रूप हट जाये तो x का मान रखकर सीमा ज्ञात की जा सकती है।

अनिर्धार्यता को हटाने की विधि (Methods of removing indeterminacy)रू

(i) गुणनखण्ड

(ii) परिमेयकरण या द्विपरिमेयकरण

(iii) प्रतिस्थापन द्वारा

(iv) मानक सीमाओं का उपयोग

(v) फलनों के प्रसार द्वारा

गुणनाखण्ड विधि (Factorization method):

हम उन गुणनखण्डों को हटा सकते हैं जो अनिर्धार्यता को बढ़ावा देते हैं और शेष व्यंजक की सीमा ज्ञात करते हैं।

परिमेयकरण विधि (Rationalization method):

अनिर्धार्यता को हटाने के लिये हम अपरिमेय व्यंजक को उसके संयुग्मी से गुणा करके परिमेयकरण कर सकते हैं।

मानक सीमाएँ (Standard limits):

(A) यदि $f(x) \rightarrow 0$, जब $x \rightarrow a$, तो

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$ (ii) $\lim_{x \rightarrow a} \cos f(x) = 1$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan f(x)}{f(x)} = 1$ (iv) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1$
- (v) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{b^{f(x)} - 1}{f(x)} = \ell n b, (b > 0)$ (vi) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ell n(1 + f(x))}{f(x)} = 1$
- (vii) $\lim_{x \rightarrow a} (1 + f(x))^{1/f(x)} = e$
- (viii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > 0$ तथा $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = B$ (एक परिमित संख्या) तो $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\phi(x)} = A^B$
- (b) (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = 1$
 [जहाँ x रेडियन में नापा गया है]
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$; $\left(\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{1/x} = e^a \right)$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$; $\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{1/x} = e^a \right)$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a, a > 0$
- (iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ell n(1+x)}{x} = 1$
- (v) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$

सीमा समस्याओं को हल करने के लिए प्रतिस्थापन का उपयोग (Use of substitution in solving limit problems):

कभी-कभी सीमा समस्याओं को हल करते समय हम समस्या की आवश्यकतानुसार $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ को $x = a + h$ या $x = a - h$ प्रतिस्थापन द्वारा $\lim_{x \rightarrow 0} f(a+h)$ या $\lim_{x \rightarrow 0} f(a-h)$ में परिवर्तित करते हैं। (यहाँ h, शून्य की ओर अग्रसर है।)

प्रसार का उपयोग करने पर सीमाएँ (Limits using expansion):

- (a) $a^x = 1 + \frac{a \ln a}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 a}{3!} + \dots, a > 0$
- (b) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
- (c) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ for $-1 < x \leq 1$
- (d) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$
- (e) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

- (f) $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$
- (g) $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$
- (h) $\sin^{-1} x = x + \frac{1^3}{3!}x^3 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{5!}x^5 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{7!}x^7 + \dots$
- (i) $\sec^{-1} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{61x^6}{6!} + \dots$
- (j) for $|x| < 1, n \in \mathbb{R}; (1+x)^n = 1 + nx \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \infty$
- (k) $(1+x)^{1/x} = e \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 + \dots \right)$

सीमा जब $x \rightarrow \infty$ (Limit when $x \rightarrow \infty$):

इस प्रकार की समस्याओं में अंश एवं हर दोनों में से x महत्तम घात को उभयनिष्ठ लेते हैं। कई बार जब $x \rightarrow \infty$ हो तो $y = \frac{1}{x}$ प्रतिस्थापित करने पर $x \rightarrow 0^+$

कुछ महत्वपूर्ण बिन्दु (Some important notes):

- (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ (iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = 0$
- (v) $\lim_{x \rightarrow \infty^+} x(\ln x)^n = 0$

जब $x \rightarrow \infty$ हो, तो $\ln x, x$ की किसी भी धनात्मक घात से काफी कम गति बढ़ता है जबकि e^x, x की धनात्मक घात से काफी तेजी से बढ़ता है।

(iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1-h)^n = 0$ और $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+h)^n \rightarrow \infty$, जहाँ $h \rightarrow 0^+$.

$1^\infty, 0^0, \infty^0$ रूप की सीमाएं (Limits of form $1^\infty, 0^0, \infty^0$)

(A) इस सभी रूपों को निम्न तरीकों से $\frac{0}{0}$ रूप में परिवर्तित किया जा सकता है—

- (a) यदि $x \rightarrow 1, y \rightarrow \infty$ हो, तो $z = (x)^y, 1^\infty$ रूप
 $\Rightarrow \ln z = y \ln x \Rightarrow \ln z = \frac{\ln x}{(1/y)} = \left(\frac{0}{0} \right)$ रूप

चूँकि $y \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{y} \rightarrow 0$

और $y \rightarrow 1 \Rightarrow \ln x \rightarrow 0$

- (b) यदि $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ हो, तो $z = x^y, 0^0$ रूप
 $\Rightarrow \ln z = y \ln x \Rightarrow \ln z = \frac{y}{1/\ln x} = \frac{0}{0}$ रूप

- (c) यदि $x \rightarrow \infty, y \rightarrow 0$ हो, तो $z = x^y$
 $\Rightarrow \ln z = y \ln x \Rightarrow \ln z = \frac{y}{1/\ln x} = \frac{0}{0}$ रूप

(B) तथा $(1)^\infty$ रूप की समस्याओं के लिए भी हम निम्न नियमों को लागू कर सकते हैं—

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$

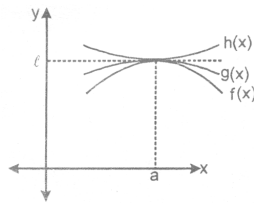
(b) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$

जहाँ $f(x) \rightarrow 1$; $g(x) \rightarrow \infty$ जब $x \rightarrow a$

$$= \lim_{x \rightarrow a} [1 + f(x) - 1]^{\frac{1}{f(x)-1} \cdot \{f(x)-1\} \cdot g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} [f(x)-1]g(x)}$$

सैंडविच प्रमेय या स्क्वूजी प्ले (निष्पीडित खेल) प्रमेय (Sandwich theorem or squeeze play theorem):

यदि $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \forall x$ और $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$ हो, तो $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$



Exercise -1

1-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^{-1}(\sec x)$ का मान है:

(A) $\pi/2$ (B) 1 (C) शून्य (D) इनमें से कोई नहीं
2. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x + [x-1] + [1-x])$ ($1-x + [x-1] + [1-x]$), जहाँ $[x]$ जहाँ महत्तम पूर्णांक फलन है, का मान है—

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) विद्यमान नहीं है।
3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^3 + 27)\ln(x-2)}{(x^2 - 9)} =$

(A) -8 (B) 8 (C) 9 (D) -9
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4^x - 1)^3}{\sin\left(\frac{x}{p}\right) \ln\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)} =$

(A) $9p(\log 4)$ (B) $3p(\log 4)^2$ (C) $12p(\log 4)^2$ (D) $27p(\log 4)^2$
5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(e^{x-2} - 1)}{\ln(x-1)} =$

- (A) 0 (B) -1 (C) 2 (D) 1

6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^{-1}(1-x)}{\sqrt{x}} =$

- (A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) 1 (D) 0

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\ln(1+x))}{\ln(1+\sin x)}$ का मान है-

- (A) 0 (B) 1/2 (C) 1/4 (D) 1

8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{k=1}^{100} x^k - 100}{x-1} =$

- (A) 0 (B) 5050 (C) 4550 (D) -5050

9. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left[\frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos x} \right]$ जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है, का मान है-

- (A) -1 (B) 0 (C) -2 (D) विद्यमान नहीं है।

10. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan^2 x \left(\sqrt{2 \sin^2 x + 3 \sin x + 4} - \sqrt{\sin^2 x + 6 \sin x + 2} \right)$

- (A) 1/10 (B) 1/11 (C) 1/12 (D) 1/8

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \cdot \sin \frac{1}{x} + x + 1}{x^2 + x + 1} =$

- (A) 0 (B) 1/2 (C) 1 (D) इनमें से कोई नहीं

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-n+(-1)^n}{4n-(-1)^n} =$

- (A) $-\frac{3}{4}$
 (B) $-\frac{3}{4}$ यदि n सम है $\frac{3}{4}$ यदि n विषम है।
 (C) यदि n सम है तो विद्यमान नहीं है $-\frac{3}{4}$ यदि n विषम है।
 (D) +1 यदि n सम है, यदि n विषम है तो विद्यमान नहीं है।

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) =$

- (A) 1/2 (B) 3/2 (C) 1/3 (D) 1

14. $\lim_{x \rightarrow \infty} n \cos\left(\frac{\pi}{4n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)$ का मान है—
 (A) $\pi/3$ (B) $\pi/4$ (C) $\pi/6$ (D) इनमें से कोई नहीं
16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{x+1} =$
 (A) e^4 (B) e^{-4} (C) e^2 (D) इनमें से कोई नहीं
17. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \tan^2 \sqrt{x})^{5/x} =$
 (A) e^5 (B) e^2 (C) e (D) इनमें से कोई नहीं
18. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (1 + [x])^{1/\ln(\tan x)}$ जहां [.] महत्तम पूर्णांक फलन है, का मान है—
 (A) 0 (B) 1 (C) e (D) e^{-1}
19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2}\right)^x =$
 (A) 1 (B) 2 (C) e^2 (D) e
20. यदि $x \rightarrow 0$ हो तो $(\cos)^{1/\sin x}$ का सीमान्त मान है—
 (A) 1 (B) e (C) 0 (D) इनमें से कोई नहीं
21. $\lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{a}{x}\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}$ का मान है
 (A) $e^{-a/\pi}$ (B) $e^{-2a/\pi}$ (C) $e^{-2/\pi}$ (D) 1
22. यदि $[x]$, x से छोटे एवं बराबर महत्तम पूर्णांक को प्रदर्शित करता है, तो $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} ([1^3 x] + [2^3 x] + \dots + [n^3 x])$ का मान है—
 (A) $x/2$ (B) $x/3$ (C) $x/6$ (D) $x/4$
23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} + 3^n - 2^{2n}}{5^n + 2^n + 3^{2n+3}} =$
 (A) 5 (B) 3 (C) 1 (D) शून्य

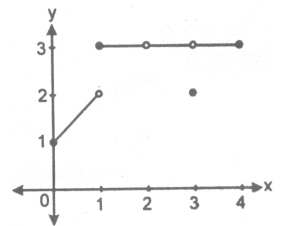
एक से अधिक विकल्प सही

24. माना $f(x) = \frac{x^2 - 9x + 20}{x - [x]}$ जहां [.] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है, का मान है:
 (A) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$ (B) $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 1$

- (C) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ विद्यमान नहीं है। (D) इनमें से कोई नहीं
25. माना $f(x) = \frac{\cos 2 - \cos 2x}{x^2 - |x|}$ तब—
 (A) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \sin 2$ (B) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \sin 2$
 (C) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2 \cos 2$ (D) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \cos 2$
26. माना $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{3x - 6}$ हो, तो—
 (A) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\frac{1}{3}$ (B) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{3}$ (C) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{3}$ (D) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\frac{1}{3}$
27. यदि $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + a \sin x)^{1/x} = e^2$ हो, तो a एवं b के सम्भावित मान हैं—
 (A) a = 1, b = 2 (B) a = 2, b = 1 (C) a = 3, b = 2/3 (D) a = 2/3, b = 3
28. माना $f(x) = |x|^{\sin x}$ हो तो—
 (A) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ (B) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$
 (C) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ (D) सीमा विद्यमान नहीं है।
29. यदि $\ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + a \cos x) - b \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + a \cos x}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b \sin x}{x^3}$ जहाँ $\ell \in \mathbb{R}$ हो तो—
 (A) (a, b) = (-1, 0) (B) a एवं b कोई वास्तविक संख्याएं हैं।
 (C) $\ell = 0$ (D) $\ell = \frac{1}{2}$

1-B (विषयात्मक प्रश्न)

1. $y = f(x)$ के दिए गए आलेख का अवलोकन करने निम्नलिखित सीमाओं के मान ज्ञात कीजिए—



- (i) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (ii) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
 (iii) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ (iv) $\lim_{x \rightarrow 1.99} f(x)$ (v) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
2. (A) निम्नलिखित सीमाओं के मान ज्ञात कीजिए
 (i) $\lim_{x \rightarrow 2} (x + \sin x)$ (ii) $\lim_{x \rightarrow 2} (\tan x - 2^x)$
 (iii) $\lim_{x \rightarrow 3/4} x \cos x$ (iv) $\lim_{x \rightarrow 5} x^x$ (v) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{\sin x}$

(B) निम्नलिखित सीमाओं के मान ज्ञात कीजिए
जहां $[.]$ फलन के महत्तम पूर्णांक फलन और $\{.\}$ भिन्नात्मक भाग को प्रदर्शित करता है—

(i) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\sin x]$ (ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{x}{2} \right\}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow \pi} \operatorname{sgn}[\tan x]$ (iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \sin^{-1}(\ln x)$

3. यदि $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \geq 2 \\ 1 + x, & x < 2 \end{cases}$ और $g(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x > 1 \\ 3 - x, & x \leq 1 \end{cases}$ हो, तो $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x))$ $f(g(x))$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि सीमा विद्यमान हो, तो निम्नलिखित सीमाओं के मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x + 1}{x - 1}$ (ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - x^2 + 2x - 5}{x^6 + 5x^3 - 2x - 4}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{a + 2x} - \sqrt{3x}}{\sqrt{3a + x} - 2\sqrt{x}}, a \neq 0$

5. यदि सीमा विद्यमान हो, तो निम्नलिखित सीमाओं के मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 5x}$ (ii) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x - 2x}{3x - \sin^2 x}$

6. (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{bx} - e^{ax}}{x}$ का मान ज्ञात कीजिए, जहां $0 < a < b$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{2+x} - e^2)}{1 - \cos x}$ का मान ज्ञात कीजिए

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{3^x - 1}$ का मान ज्ञात कीजिए

(iv) $n \in \mathbb{N}$ का मान ज्ञात कीजिए यदि $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^n - 2^n}{x - 2} = 80$

7. (i) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x+2)^{\frac{5}{2}} - (a+2)^{\frac{5}{2}}}{x - a}$ का मान ज्ञात कीजिए

(ii) यदि $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax + bx^2)^{\frac{c}{x-1}} = e^3$ हो, तो a, b और c में प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए।

8. निम्नलिखित सीमाओं को ज्ञात कीजिए—

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2} + \dots + \frac{x}{x^2} \right)$ (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \cos(\sqrt{x+1}) - \cos(\sqrt{x}) \right\}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow} \sqrt{x^2 - 8x + x}$ (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt[3]{n^4 + 1}}{\sqrt[4]{n^6 + 6n^5 + 2} - \sqrt[3]{n^7 + 3n^3 + 1}}$
 (v) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3}$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} (((x+1)(x+2)(x+3)(x+4))^{1/4} - x)$ का मान ज्ञात कीजिए।

10. (A) प्रसार का उपयोग करते हुए निम्न सीमाओं के मान ज्ञात कीजिए:-

(i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)^{\frac{1}{2}} - (15x+2)^{\frac{1}{5}}}{(7x+2)^{\frac{1}{4}} - x}$ (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x - \frac{\tan^2 x}{2}}{x^3}$

(B) यदि $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + b \sin x - \cos x + ce^x}{x^3}$ विद्यमान हो, तो a, b, c के मान ज्ञात कीजिए तथा सीमा भी ज्ञात कीजिए।

11. निम्न सीमाओं के मान ज्ञात कीजिए-

(i) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$ (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2x}{1+3x} \right)^x$ (iii) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \ln x)^{\sec \frac{\pi x}{2}}$

(iv) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x)^{x^2}$ (v) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\cos x}$

(vi) $\lim_{x \rightarrow 0^+} ([x])^{1-x}$, जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।

12. (A) निम्न सीमाओं के मान ज्ञात कीजिए-

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln \left(1 + \frac{\ln x}{x} \right)}{\ln x}$ (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x \sin \left(\frac{x^n}{e^x} \right)}{x^n}$

(B) यदि $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$ हो, तो f(x) का परिसर ज्ञात कीजिए।

Exercise -2

2-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

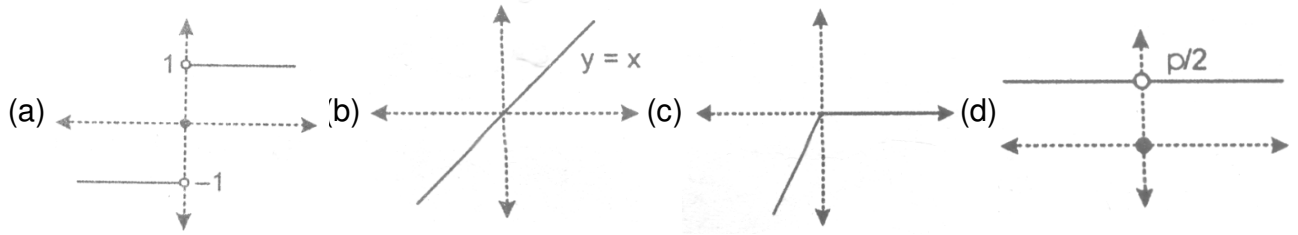
केवल एक विकल्प सही

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x - \tan^{-1} x}{x^3} =$

- (A) 0 (B) 1/2 (C) 1 (D) इनमें से कोई नहीं
2. यदि $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ 2x^2-2 & x < 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ -x^2+1, & x \leq 0 \end{cases}$ और $h(x) = |x|$ हो, तो $\lim_{x \rightarrow 0} f[g(h(x))]$ का मान है—
 (A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) विद्यमान नहीं है।
3. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(1 - \tan \frac{x}{2})(1 - \sin x)}{(1 + \tan \frac{x}{2})(\pi - 2x)^3}$ का मान है—
 (A) 1/16 (B) -1/16 (C) 1/32 (D) -1/32
4. माना $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ x & x = 0 \end{cases}$ हो, तो $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$
 (A) 0 (B) -1/2 (C) 1 (D) इनमें से कोई नहीं
5. $\lim_{x \rightarrow a^-} \left(\frac{|x|^3}{a} - \left[\frac{x}{a} \right]^3 \right)$ ($a < 0$) जहाँ $[x]$, x से छोटा या बराबर महत्तम पूर्णांक को प्रदर्शित करता है, का मान है—
 (A) $-a^2+1$ (B) $-a^2-1$ (C) a^2-1 (D) $-a^2$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{9x^2 + x + 1}} =$
 (A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) 0 (D) विद्यमान नहीं है।
7. यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α और β हो, तो $\lim_{x \rightarrow \alpha} (1 + ax^2 + bx + c)^{\frac{1}{x-\alpha}} =$
 (A) $a(\alpha - \beta)$ (B) $\ln|a(\alpha - \beta)|$ (C) $e^{a(\alpha - \beta)}$ (D) $e^{a|\alpha - \beta|}$
8. माना समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α, β जहाँ $1 < \alpha < \beta$. यदि $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|ax^2 + bx + c|}{ax^2 + bx + c} = 1$ हो तो निम्न कथनों में से असत्य कथन है—
 (A) $a > 0$ और $x_0 < 1$ (B) $a > 0$ और $x_0 < \beta$
 (C) $a < 0$ और $\alpha < x_0 < \beta$ (D) $a < 0$ और $x_0 < 1$

9. यदि $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sqrt{a+x}(bx - \sin x)} = 1$ हो, तो a एवं b के मान हैं (जहाँ $a > 0$)—
 (A) $b = 1, a = 36$ (B) $a = 1, b = 6$ (C) $a = 1, b = 36$ (D) $b = 1, a = 6$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - e^x) \frac{\sin x}{|x|} \right]$ (जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है) का मान है—
 (A) -1 (B) 1 (C) 0 (D) विद्यमान नहीं है।
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sec^{-1} \left(\frac{x}{x+1} \right) =$
 (A) 0 (B) π (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) विद्यमान नहीं है।
12. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\sin(x/2)} \sin x$ का मान है—
 (A) 1 (B) 0 (C) 4 (D) $\frac{1}{4}$
13. एक वास्तविक मान फलन f इस प्रकार है कि $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan^2[x]}{(x^2 - [x]^2)} & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ \sqrt{\{x\} \cot\{x\}} & x < 0 \end{cases}$
 जहाँ [x], x का पूर्णांक का और {x}, x का भिन्नात्मक भाग है तो—
 (A) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ (B) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \cot 1$
 (C) $\cot^{-1} \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right)^2 = 1$ (D) $x = 0$ पर f सतत् है
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2} =$
 (A) 1/2 (B) -1/2 (C) 3/2 (D) 1
15. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\left[\frac{n \sin \theta}{\theta} \right] + \left[\frac{n \tan \theta}{\theta} \right] \right)$ जहाँ [x] महत्तम पूर्णांक फलन है और $n \in \mathbb{I}$, है—
 (A) 2n (B) $2n + 1$ (C) $2n - 1$ (D) विद्यमान नहीं है।
16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \right)$ का मान है—
 (A) 1 (B) 1/2 (C) 0 (D) 2

17. फलन $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{\pi} \cot^{-1} \frac{x}{t^2} \right)$ का आलेख है-



18. यदि $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ विद्यमान है तथा परिमित एवं अशून्य है और $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(x) + \frac{3f(x)-1}{f(x)^2} \right) = 3$ हो, तो $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ का मान है।-

- (A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं

19. $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$ का मान है-

- (A) 1/5 (B) 1/6 (C) 1/4 (D) 1/2

20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x \left[\left(2^{x^n} \right)^{\frac{1}{e^x}} - \left(3^{x^n} \right)^{\frac{1}{e^x}} \right]}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$ का मान है-

- (A) 0 (B) $\ln(2/3)$ (C) $\ln(3/2)$ (D) इनमें से कोई नहीं

21. $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp \left(x \ln \left(1 + \frac{ay}{x} \right) \right) - \exp \left(x \ln \left(1 + \frac{by}{x} \right) \right)}{y} \right)$

- (A) $a + b$ (B) $a - b$ (C) $b - a$ (D) $-(a+b)$

एक से अधिक विकल्प सही

22. यदि $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + a \sin x}{x^2} = P$ (परिमित) हो, तो-

- (A) $a = -2$ (B) $b = -1$ (C) $p = -2$ (D) $p = -1$

23. माना $f(x) = \frac{|x + \pi|}{\sin x}$ हो, तो-

- (A) $f(-\pi^-) = +1$ (B) $f(-\pi^+) = -1$

(C) Limit $f(x)$ विद्यमान नहीं है।

(D) Limit $f(x)$ विद्यमान नहीं है।

24. यदि $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax + bx^2)^{2/x} = e^3$ हो तो a और b के मान हैं—

(A) $a = 3, b = 0$

(B) $a = 3/2, b = 1/2$

(C) $a = 3/2, b = 3/2$

(D) $a = 3/2, b = 0$

25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(ax - 1)^n}{x^n + A} =$

(A) a^n यदि $n \in \mathbb{N}$

(B) ∞ यदि $n \in \mathbb{N}^-$ एवं $a = A = 0$

(C) $\frac{1}{1+A}$ यदि $n = 0$

(D) a^n यदि $n \in \mathbb{N}^-, A = 0$ एवं $a \neq 0$

26. माना $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2x}{a}, & 0 \leq x < 1 \\ ax, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$ यदि $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ विद्यमान है, तो a का मान है—

(A) 1

(B) -1

(C) 2

(D) -2

2-B (विषयात्मक प्रश्न)

1. निम्नलिखित सीमाओं के मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln(1+x) - \ln 2)(3 \cdot 4^{x-1} - 3x)}{[(7+x)^2 - (1+3x)^2] \cdot \sin(x-1)}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1+x)^{1/x}}{\tan x}$

2. निम्नलिखित सीमाओं को सिद्ध कीजिए—

(i) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\cos \alpha)^x - (\sin \alpha)^x - \cos 2\alpha}{x - 4} = \cos^4 \alpha \ln(\cos \alpha) - \sin^4 \alpha \ln(\sin \alpha), \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 \tan\left(\frac{1}{\pi x^2}\right) + 3|x|^2 + 7}{|x|^3 + 7|x| + 8} = -\frac{1}{\pi}$

3. निम्नलिखित सीमाओं का सत्यापन कीजिए—

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{2}}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^x + b^x)^{\frac{1}{x}}, a > b > 0$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2-ax}\right) \right]^{\sec^2\left(\frac{\pi}{2-bx}\right)} = e^{-\frac{a^2}{b^2}}$

4. a और b के मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए—

(i) $\text{Limit}_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + ax \sin x) - (b \cos x)}{x^4}$ का एक परिमित मान हो सकता हो।

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4 + ax^3 + 3x^2 + bx + 2} - \sqrt{x^4 + 2x^3 - cx^2 + 3x - d} \right) = 4$

5. यदि $P_n = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \frac{4^3 - 1}{4^3 + 1} \dots \dots \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$ हो तो, सिद्ध कीजिए कि $\text{Limit}_{x \rightarrow \infty} P_n = \frac{2}{3}$

6. माना कि $f(x) = \frac{\sin^{-1}(1 - \{x\}) \cdot \cos^{-1}(1 - \{x\})}{\sqrt{2\{x\}(1 - \{x\})}}$ है तो $\text{Lim}_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ तथा $\text{Lim}_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ज्ञात कीजिए—
 (जहाँ $\{x\}$, x के भिन्नात्मक भाग को प्रदर्शित करता है।)

7. किसी वृत्त पर स्थित एक बिन्दु A से एक जीवा AP खींची जाती है और बिन्दु A पर स्पर्श रेखा पर कोई बिन्दु T इस प्रकार लिया जाता है कि AT = AP यदि TP को आगे बढ़ाने पर यह A से गुजरने वाले व्यास को Q पर मिलती है, तो सिद्ध कीजिए कि जब P, A तक गति करता है तो AQ का सीमान्त मान वृत्त के व्यास का दुगुना होता है।

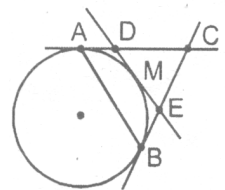
8. यदि $f(x) = \text{Limit}_{m \rightarrow \infty} \left\{ \text{Limit}_{n \rightarrow \infty} (\cos^{2m}(n! \pi x)) \right\}$ जहाँ $x \in \mathbb{R}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ 0, & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$

9. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \sin^n x}{\sin^n x + 1} \cdot f(x)$ का प्रान्त एवं परिसर ज्ञात कीजिए, जहाँ $n \in \mathbb{N}$.

10. सेण्डविच प्रमेय का उपयोग करके सिद्ध कीजिए कि $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

11. यदि $x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3 + \sqrt{3}}, x_3 = -\sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}}, \dots$ हो तो $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ का मान ज्ञात कीजिए।

12. वृत्त का एक चाप AB है। A एवं B पर खींची गई स्पर्श रेखाएं C पर प्रतिच्छेद करती है। माना AB का मध्य बिन्दु M है। M पर खींची गई स्पर्श रेखा, AC एवं BC को क्रमशः D एवं E (चित्रानुसार) पर मिलती है। $\lim_{AB \rightarrow 0} \frac{\Delta ABC}{\Delta DEC}$ का मान ज्ञात कीजिए।



Exercise -3

3-A (स्तम्भ मिलान)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, जहाँ $f(x)$ कॉलम-I के अंतर्गत है।

स्तम्भ-II

(A) $f(x) = \frac{\tan[e^2]x^2 - \tan[-e^2]x^2}{\sin^2 x}$

स्तम्भ-II

(p)

$\sqrt{2}/8$

जहाँ $[x]$ महत्तम पूर्णांक फलन है—

(B) $f(x) = \frac{[5/2 + \tan x + \tan^2 x] - [5/2]}{\tan x}$ (q) 15

जहाँ $[x]$ महत्तम पूर्णांक फलन है—

(C) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$ (r) 0

(D) $f(x) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$ (s) 1/2

2. माना $\phi(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m+1} + \dots + a_kx^{m+k}}{b_0x^n + b_1x^{n+1} + \dots + b_\ell x^{n+\ell}}$ जहाँ $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$, तो $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x)$ है—

स्तम्भ I

(A) $m > n$

(B) $m = n$

(C) $m < n$ तथा $n-m$ सम है $a_0/b_0 > 0$

(D) $m < n$ तथा $n-m$ सम है $a_0/b_0 < 0$

स्तम्भ II

(p) ∞

(q) $-\infty$

(r) a_0/b_0

(s) 0

3-B (कथन/कारण)

3. कथन-1 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] \neq \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right]$ जहाँ $[.]$ महत्तम पूर्णांक फलन है।

कथन-2 $\lim_{x \rightarrow a} h(g(x)) = h\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$, यदि $x = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ पर $y = h(x)$ संतत है

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है, कथन-2 कथन-1 की सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है, कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

4. कथन -1 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$ विद्यमान नहीं है।

कथन -2 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है, कथन-2 कथन-1 की सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है, कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

5. कथन-1 : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \right)^{\frac{1}{x}} = e$

कथन-2 : $\lim_{x \rightarrow a} (1 + f(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)}$

यदि $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ और $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है, कथन-2 कथन-1 की सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है, कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

6. कथन -1: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x^3 + 7x}{3x^4 + 2x^2 + 3x} = \frac{2}{3}$

कथन-2: यदि P(x) और Q(x) दो बहुपत है जिनके गुणांक परिमेय है, तो

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x) \text{ में } x \text{ की अधिकतम घात का गुणांक}}{Q(x) \text{ में } x \text{ की अधिकतम घात का गुणांक}}$$

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है, कथन-2 कथन-1 की सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है, कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

3-C (अनुच्छेद)

7. अनुच्छेद

माना दो फलन $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^n$ तथा $g(x) = -x^{4b}$ है, जहाँ $b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1} \right)$

7.1 f(x) है—

- (A) e^{-x^2} (B) $e^{-\frac{x^2}{2}}$ (C) e^{x^2} (D) $e^{\frac{x^2}{2}}$

7.2 g(x) है—

- (A) $-x^2$ (B) x^2 (C) x^4 (D) $-x^4$

7.3 f(x) + g(x)=0 के हलों की संख्या है—

- (A) 2 (B) 4 (C) 0 (D) 1

8. अनुच्छेद

माना $f(x) = \frac{\sin x + ae^x + be^{-x} + c \ln(1+x)}{x^3}$ जहां a,b,c, वास्तविक संख्याएँ हैं—

- 8.1 यदि $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ परिमित है, तो $a+b+c$ का मान है—
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -2
- 8.2 यदि $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ell$ (परिमित), तो ℓ का मान है—
 (A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) -1 (D) $-\frac{1}{3}$
- 8.3 उपरोक्त प्राप्त a, b, c के मानों को प्रयोग करते हुए $\lim_{x \rightarrow 0^+} x f(x)$ का मान है।
 (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) 2

.....
3-D (सत्य/असत्य कथन)

9. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{x}$, अनिर्धार्य रूप में है।
10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x$, अनिर्धार्य रूप में है।
11. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+6)^{\frac{1}{3}} - 2}{2-x} = \frac{-1}{12}$
12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(3^x)}{3^x} = 0$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$ का मान 1 है।

.....
3-E (रिक्त स्थान की पूर्ति)

14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1} = \dots\dots\dots$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2+x) + \ln 0.5}{x} = \dots\dots\dots$
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{\tan x - x} = \dots\dots\dots$
17. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x) = \dots\dots\dots$

18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}, n \in \mathbb{N}, = \dots\dots\dots$

Exercise - 4

.....
4-A (पूर्ववर्ती JEE परीक्षा प्रश्न)

IIT-JEE 2006

1. $x > 0$ के लिए $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{1/x} + (1/x)^{\sin x}$ का मान है—
 (A) 0 (B) -1 (C) 1 (D) 2

IIT-JEE-2004

2. फलन $f(x)$ को $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ में परिभाषित किया जाता है तथा $(-1, 1)$ में अवकनीय फलन है। यदि $f'(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} n \left(f\left(\frac{1}{n}\right) \right)$
 तथा $f(0)=0$ है तो, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{\pi} (1+n) \cos^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) - n \right]$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि $\left| \cos^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{\pi}{2}$.

IIT-JEE-2003

3. यदि $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{((a-n)x - \tan x) \sin nx}{x^2} = 0$, जहाँ n अशून्य वास्तविक संख्या है, तो a का मान है—
 (A) 0 (B) $\frac{n+1}{n}$ (C) n (D) $n + \frac{1}{n}$

IIT-JEE-2002

4. पूर्णांक 'n' जिसके लिए $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x - e^x)}{x^n}$ एक परिमित अशून्य संख्या है, है—
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

IIT-JEE-2001

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cos^2 x)}{x^2} =$
 (A) $-\pi$ (B) π (C) $\pi/2$ (D) 1

IIT-JEE-2000

6. $x \in \mathbb{R}$ के लिए $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^x =$
 (A) e (B) e^{-1} (C) e^{-5} (D) e^5

IIT-JEE-1999

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan 2x - 2x \tan x}{(1 - \cos 2x)^2}$ का मान है—
 (A) 2 (B) -2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$

IIT-JEE-1998

8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1 - \cos 2(x-1)}}{x-1}$
 (A) विद्यमान है और $\sqrt{2}$ के बराबर है।
 (B) विद्यमान है और $-\sqrt{2}$ के बराबर है।
 (C) विद्यमान नहीं है क्योंकि $x-1 \rightarrow 0$
 (D) विद्यमान नहीं है क्योंकि बांयी सीमा, दांयी सीमा के बराबर नहीं है।

IIT-JEE-1997

9. अचर a, b एवं c के मान ज्ञात कीजिए ताकि $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{axe^x - b \log(1+x) + cxe^{-x}}{x^2 \sin x} = 2$ हो.

IIT-JEE-1996

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+5x^2}{1+3x^2} \right)^{1/x^2} = \dots$

IIT-JEE-1993

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \{\tan(\pi/4 + x)\}^{1/x}$ का मान ज्ञात कीजिए—

.....
4-B (पूर्ववर्ती AIEEE/DCE परीक्षा प्रश्न)

12. If $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right)^{2x} = e^2$, तो a तथा b का मान है—
 (A) $a \in R, b \in R$ (B) $a = 1, b \in R$ (C) $a \in R, b = 2$ (D) $a = 1, b = 2$

13. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\left(1 - \tan \frac{x}{2}\right)(1 - \sin x)}{\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)(\pi - 2x)^3} =$
 (A) 1/16 (B) -1/16 (C) 1/32 (D) -1/32

14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^{x^n} - [x]}{[x]}$, $n \in N$, ($[x]$ महत्तम पूर्णांक फलन है)

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) विषयामान नहीं है।

15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 3}{x^2 + x + 3} \right) =$

- (A) e^4 (B) e^2 (C) e^3 (D) e

16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2} \sec^2 \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} \sec^2 \frac{4}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \sec^2 1 \right] =$

- (A) $\frac{1}{2} \tan 1$ (B) $\tan 1$ (C) $\frac{1}{2} \operatorname{cosec} 1$ (D) $\frac{1}{2} \sec 1$.

17. माना α तथा β समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के भिन्न-भिन्न मूल हैं, तो $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1 - \cos(ax^2 + bx + c)}{(x - \alpha)^2} =$

- (A) $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2$ (B) $-\frac{a^2}{2}(\alpha - \beta)^2$ (C) 0 (D) $\frac{a^2}{2}(\alpha - \beta)^2$

18. यदि $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right)^{2x} = e^2$, तो a तथा b मान है—

- (A) $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ (B) $a = 1, b \in \mathbb{R}$ (C) $a \in \mathbb{R}, b = 2$ (D) $a = 1, b = 2$

19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} e^{r/n} =$

- (A) e (B) $e - 1$ (C) $1 - e$ (D) $e + 1$

20. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left[1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right] [1 - \sin x]}{\left[1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right] [\pi - 2x]^3} =$

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{32}$ (D) ∞

21. यदि $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(3+x) - \log(3-x)}{x} = k$, तो k का मान है—

- (A) 0 (B) $-1/3$ (C) $2/3$ (D) $-2/3$

22. $f^n(a), g^n(a)$ विद्यमान है तथा किसी n के लिए समान नहीं है। यदि $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a)f(x) - f(a) - g(a)f(x) + g(a)}{g(x) - f(x)} = 4$, तो k को मान है—

- (A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 0

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2^4+3^4+\dots+n^4}{n^5} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2^3+3^3+\dots+n^3}{n^5} =$

- (A) 1/30 (B) 0 (C) 1/4 (D) 1/5

24. $(1 + 3x + 2x^2)$ का विस्तार है-

- (A) $-3x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{9}{3}x^3 - \frac{17}{4}x^4 + \dots\infty$ (B) $3x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{3}x^3 - \frac{17}{4}x^4 + \dots\infty$
 (C) $4x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{3}x^3 - \frac{17}{4}x^4 + \dots\infty$ (D) $3x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{3}x^3 - \frac{17}{4}x^4 + \dots\infty$

25. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin 2x}{\sin x} =$

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 2 (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{3}$

26. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x - \sin x}{x + \cos^2 x}} =$

- (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) -1

27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 1}{3^x - 1} =$

- (A) e (B) $\log_4 3$ (C) $\log_3 4$ (D) 1

28. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{a}{n}\right)^n =$

- (A) e^{2a} (B) e (C) e^a (D) 0

29. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2n-1).(2n+1)}$

- (A) 1/2 (B) 1/3 (C) 1/4 (D) कोई नहीं

30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$ का मान है-

- (A) a + b (B) a - b (C) e^{ab} (D) 1

31. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{|x|^3}{3} - \left[\frac{x}{3} \right]^3 \right)$, जहाँ [x] महत्तम पूर्णांक फलन है-

- (A) 5/3 (B) 8/3 (C) 7/9 (D) कोई नहीं

32.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^{1/2}}{(n+3)^{3/2}} + \frac{n^{1/2}}{(n+6)^{3/2}} + \frac{n^{1/2}}{(n+9)^{3/2}} + \dots + \frac{1}{8n} \right] =$$

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) कोई नहीं

Answers

EXERCISE # 1-A

1. D 2. C 3. C 4. B 5. D 6. B 7. D
 8. B 9. C 10. C 11. C 12. A 13. A 14. B
 15. C 16. A 17. A 18. B 19. C 20. A 21. C
 22. D 23. D 24. ABC 25. AB 26. AB
 27. ABCD 28. ABC 29. AD

EXERCISE # 1-B

1. (i) Limit does not exist (ii) 3
 (iii) 3 (iv) 3 (v) 3
 2. (A) (i) $2 + \sin 2$ (ii) $\tan 3 - 2^3$ (iii) $\frac{3}{4} \cos \frac{3}{4}$
 (iv) 5^5 (v) $\frac{e}{\sin 1}$
 (B) (i) 0 (ii) Limit does not exist (iii) Limit does not exist
 (iv) 0
 3. 6 4. (i) $-\frac{3}{2}$ (ii) $\frac{12}{19}$ (iii) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$
 5. (i) $\frac{16}{25}$ (ii) 2 (iii) 1/3
 6. (i) (b-a) (ii) $2e^2$ (iii) $\frac{3}{\ln 3}$ (iv) 5
 7. (i) $\frac{5}{2}(a+2)^{3/2}$ (ii) $a+b=0$ and $bc=3$
 8. (i) 1/2 (ii) zero (iii) ∞ (iv) 1 (v) 0

9. $\frac{5}{2}$
 10. (A) (i) $-\frac{2}{25}$ (ii) $\frac{1}{3}$
 (B) $a=2, b=1, c=-1$ and limit = $-\frac{1}{3}$
 11. (i) e^{-1} (ii) 0 (iii) $e^{\frac{2}{\pi}}$ (iv) 1 (v) 1
 (vi) 0
 12. (A) (i) 1 (ii) 1 (B) $\{-1, 0, 1\}$

EXERCISE # 2-A

1. B 2. B 3. C 4. C 5. B 6. B 7. C
 8. D 9. A 10. A 11. D 12. A 13. C 14. C
 15. C 16. D 17. C 18. A 19. B 20. B 21. B
 22. AD 23. ABC 24. BCD 25. ABCD 26. BC

EXERCISE # 2-B

1. (i) $-\frac{9}{4} \ln \frac{4}{e}$ (ii) $\frac{e}{2}$
 3. (i) 1 (ii) a (iii) $\lambda = -2$
 4. (i) $a = -\frac{1}{2}, b = 1$ (ii) $a = 2, b \in \mathbb{R}, c = 5, d \in \mathbb{R}$
 6. $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
 9. Domain = $\mathbb{R} - \{2n\pi - \pi/2, n \in \mathbb{Z}\}$
 Range = $\{0\} \cup \{n\pi + \pi/4; n \in \mathbb{Z}\}$

11. $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

12. .4

16. 1 17. $\frac{a+b}{2}$ 18. 0

EXERCISE # 3

1. (A) → (p) (B) → (r) (C) → (s) (D) → (p)

2. (A) → (s), (B) → (r) (C) → (p), (D) → (q),

3. A4. B5. D 6. C 7.1 B 7.2 A 7.3 A 8.1 A

8.2 D 8.3 A 9. False

11. True 12. True 13. False 14. $\frac{1}{2}$ 15. $\frac{1}{2}$

EXERCISE # 4

1. C 2. $\frac{\pi-2}{\pi}$ 3. D 4. C 5. B 6. C

7. C 8. D 9. a=3, b=12, c=9

10. e^2 11. e^2 12. B 13. C 14. A 15. A

16. A 17. D 18. B 19. B 20. C 21. C 22. A

23. D 24. C 25. A 26. A 27. C 28. C 29. A

30. B 31. B 32. C

MQB

EXERCISE #1 (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)\right)}{x\sqrt{3}(\sqrt{3} \cos x - \sin x)} =$

- (A) -1/3 (B) 2/3 (C) 4/3 (D) -4/3

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin[x-3]}{[x-3]} \right]$ जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है क मान है—

- (A) 0 (B) 1 (C) अस्तित्व नहीं है। (D) sin 1

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1.n + 2(n-1) + 3(n-2) + \dots + n.1}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}$ का मान है—

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 1

4. माना $(\tan \alpha)x + (\sin \alpha)y - \alpha$ एवं $(\alpha \operatorname{cosec} \alpha)x + (\cos \alpha)y = 1$ दो चर रेखाएँ हँख जहाँ α प्राचल है। माना रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु P है। सीमान्त स्थिति में जब $\alpha \rightarrow 0$ हो, तो P के निर्देशांक है—

- (A) (2, 1) (B) (2, -1) (C) (-2, 1) (D) (-2, -1)

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{1/x^2} =$

- (A) e (B) $e^{2/3}$ (C) $e^{1/3}$ (D) इनमें से कोई नहीं

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \right)^{\operatorname{cosec} x} =$
- (A) e^{-1} (B) e^2 (C) e^{-2} (D) e^1
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[\cos x]}{1 + [\cos x]}$ जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है, का मान है—
- (A) 1 (B) $\sin 1$ (C) शून्य (D) अस्तित्व नहीं है।
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x =$
- (A) e (B) e^2 (C) $1/e$ (D) अस्तित्व नहीं है।
9. यदि $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-nx} + e^{nx} - 2 \cos \frac{nx}{2} - kx^2}{(\sin x - \tan x)}$ विद्यमान तथा परिमित हो, तो n एवं k के संभावित मान हैं—
- (A) $k = 3, n = 2$ (B) $k = 3, n = -2$
 (C) $k = 5, n = 2$ (D) $k = -5, n = 2$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 + \sin x)^{3/\tan x} =$
- (A) 3 (B) -3 (C) 5 (D) इनमें से कोई नहीं
11. यदि $A_j = \frac{x - a_j}{|x - a_j|}, j = 1, 2, \dots, n$ एवं $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$ हो, तो $\lim_{x \rightarrow a_m} (A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n), 1 \leq m \leq n$ का मान है—
- (A) $(-1)^{n-m+1}$ (B) $(-1)^{n-m}$ (C) $(-1)^m$ (D) विद्यमान नहीं है।
12. यदि $\frac{2x-3}{x} < f(x) < \frac{2x^2+5x}{x^2}$ हो, तो $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ का मान है—
- (A) 1 (B) 2 (C) शून्य (D) विद्यमान नहीं है।
13. माना $f(x) = \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$. यदि $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$ एवं $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m$ हो, तो —
- (A) $\ell = m$ (B) $\ell = 2m$ (C) $2\ell = m$ (D) $\ell + m = 0$
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{y^2 - (y-x)^2}}{(\sqrt{8xy - 4x^2} + \sqrt{8xy})^3}$ का मान है—

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (D) इनमें से कोई नहीं

15. माना $a = \min\{x^2 + 2x + 3, x \in \mathbb{R}\}$ एवं $b = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}$, तब $\sum_{r=0}^n a^r b^{n-r}$ का मान है—

(A) $\frac{2^{n+1} - 1}{3.2^n}$ (B) $\frac{2^{n+1} + 1}{3.2^n}$ (C) $\frac{4^{n+1} - 1}{3.2^n}$ (D) इनमें से कोई नहीं

16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha + \sin \frac{1}{n} \right)^n$ जब $\alpha \in \mathbb{Q}$, का मान है—

(A) $e^{-\alpha}$ (B) $-\alpha$ (C) $e^{1+\alpha}$ (D) $e^{1-\alpha}$

17. माना $f(x) = 3x^{10} - 7x^8 + 5x^6 - 21x^3 + 3x^2 - 7$ हो, तो $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h^3 + 3h}$ का मान है—

(A) 50/3 (B) 22/3 (C) 13 (D) इनमें से कोई नहीं

18. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a})$, $a > 0$ का मान है—

(A) $\ell \ln a$ (B) e^a (C) e^{-a} (D) इनमें से कोई नहीं

19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 - 2} + \frac{4^n (-1)^n}{2^n - 1} \right)^{-1}$ का मान है—

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) इनमें से कोई नहीं

20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left[\frac{\pi - 4}{4} + \left(1 + \frac{1}{n} \right)^\alpha \right] =$

(A) e^α (B) $e^{2\alpha}$ (C) $e^{-2\alpha}$ (D) इनमें से कोई नहीं

21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\cosh \frac{\pi}{x}}{\cos \frac{\pi}{x}} \right)^{x^2}$ जहाँ $\cosht = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ का मान है—

(A) $e^{\frac{\pi^2}{2}}$ (B) e^{π^2} (C) $e^{\frac{3\pi^2}{2}}$ (D) $e^{2\pi^2}$

22. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \cot^{-1}\{x\} \right)}{\operatorname{sgn}(x) - \cos x}$ जहाँ $\{ \}$ फलन के भिन्नात्मक भाग को प्रदर्शित करता है, का मान है—

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) विद्यमान नहीं है।

23. Limit $(\log_3 3x)^{\log_x 3}$ का मान है—
 (A) 1 (B) e^3 (C) e (D) e^2
24. Limit $\left[\frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \dots + \frac{n}{2n^2-2n+1} \right]$ का मान है—
 (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) इनमें से कोई नहीं
25. Limit $\left[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n}) \right]$ यदि $|x| < 1$, का मान है—
 (A) 0 (B) 1 (C) $1-x$ (D) $(1-x)^{-1}$
26. The value of $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{r=4n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{r}(3\sqrt{r}+4\sqrt{n})^2}$ का मान है—
 (A) $\frac{1}{35}$ (B) $\frac{1}{14}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{1}{5}$
27. Limit $(\cos mx)^{n/x^2} =$
 (A) $e^{-m^2n/4}$ (B) $e^{-m^2n/2}$ (C) $e^{-mn^2/2}$ (D) $e^{-mn^2/4}$
28. Limit $\frac{1^2n + 2^2(n-1) + 3^2(n-2) + \dots + n^2 \cdot 1}{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}$ का मान है—
 (A) $1/3$ (B) $2/3$ (C) $1/2$ (D) $1/6$
29. Limit $\frac{\int_a^{x+h} \ln^2 t dt - \int_a^x \ln^2 t dt}{h} =$
 (A) 0 (B) $\ln^2 x$ (C) $\frac{2\ln x}{x}$ (D) विद्यमान नहीं है।
30. Limit $\frac{\sin(6x^2)}{\ln \cos(2x^2 - x)}$
 (A) 12 (B) -12 (C) 6 (D) -6
31. Limit $\frac{x^n}{e^x} = 0$ (n पूर्णांक) होगा—
 (A) n के किसीभी मान के लिये नहीं (B) n के सभी मानों के लिए
 (C) केवल n के ऋणात्मक मानों के लिए (D) केवल n के धनात्मक मानों के लिए
32. यदि $\ell = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$ और $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}]$ है, जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित

करता है, तो-

- (A) $\ell = m = 0$ (B) $\ell > 0; m$ अपरिभाषित है।
 (C) $m \neq \ell, m$ दोनों विद्यमान नहीं है। (D) $\ell = 0, m \neq 0$ (यदिपि m विद्यमान है)

33. यदि $f(x) = \sum_{\lambda=1}^n \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \left(x - \frac{1}{\lambda+1}\right)$ हो, तो $\lim_{n \rightarrow \infty} f(0)$ का मान है-
 (A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं

34. यदि $f(x) = \begin{cases} \sin x & , & x \neq n\pi, n = 0 \pm 1 \pm 2, \dots \\ 2 & , & \text{अन्यथा} \end{cases}$ और $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \neq 0, 2 \\ 4 & , x = 0 \\ 5 & , x = 2 \end{cases}$
 हो तो $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x))$ का मान है
 (A) 1 (B) 0 (C) 4 (D) विद्यमान नहीं है।

एक से अधिक विकल्प सही

35. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^n}\right)^x, n > 0$ का मान है-
 (A) $1, \forall n > 1$ (B) $e, \forall n > 0$ (C) $\infty, \forall n \in (0, 1)$ (D) $0, \forall n > 1$
36. $\lim_{x \rightarrow n} [x] (\sin px)^r$ सभी $n \in I$ के लिए विद्यमान हो, तो-
 (A) $p = 2k\pi, k \in I$ एवं $r > 0$ (B) $p = k\pi, k \in I$ एवं $r > 0$
 (C) $p = k\pi, k \in I$ एवं $r \in R$ (D) $p = 2k\pi, k \in I$ एवं $r \geq 0$

EXERCISE # 2 (विषयात्मक प्रश्न)

1. निम्नलिखित सीमाओं के मान ज्ञात कीजिए-

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{27^x - 9^x - 3^x + 1}{\sqrt{5} - \sqrt{4 + \cos x}}$ (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_{\sec(x/2)} \cos x}{\log_{\sec x} \cos(x/2)}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left\{ \sqrt{x^2 + \sqrt{1 + x^4}} - x\sqrt{2} \right\}$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित सीमाओं के मान ज्ञात कीजिए-

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$ (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-1}{x} + \cos x \right)^{1/x}$

- (iii) $\text{Limit}_{x \rightarrow 1} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \ln x \right) \right]^{\frac{1}{\ln x}}$ (iv) $\text{Limit}_{x \rightarrow 1} (1-x^2) \frac{1}{\ln(1-x)}$
- (v) $\text{Limit}_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{1/x}$
- (vi) $\text{Limit}_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1^{1/x} + a_2^{1/x} + a_3^{1/x} + \dots + a_n^{1/x}}{n} \right)^{nx}$ जहाँ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n > 0$
- (vii) $\text{Limit}_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x)^{\cot x}$

4. a एवं b के मान ज्ञात कीजिए ताकि $\text{Limit}_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + ax - b) = 0$ हो।

5. प्रसार का उपयोग करके निम्नलिखित सीमाएँ ज्ञात कीजिए—

- (i) $\text{Limit}_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - x^2}{x^2 \tan^2 x}$ (ii) $\text{Limit}_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

6. माना $f(x) = \frac{\sin^{-1}(1-\{x\}) \cdot \cos^{-1}(1-\{x\})}{\sqrt{2}\{x\} \cdot (1-\{x\})}$ हो, तो $\text{Limit}_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ एवं $\text{Limit}_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ $\{.\}$ फलन के भिन्नात्मक भाग को प्रदर्शित करता है।

7. निम्नलिखित सीमाओं के मान ज्ञात कीजिए—

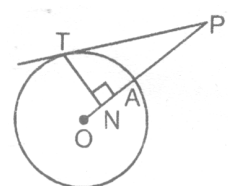
- (i) $\text{Limit}_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \dots \cos \frac{x}{2^n}$
- (ii) $\text{Limit}_{x \rightarrow \infty} \log_{x-1}(x) \cdot \log_x(x+1) \cdot \log_{x+1}(x+2) \cdot \log_{x+2}(x+3) \dots \log_k(x^5)$; जहाँ $k = x^5 - 1$.

8. यदि $f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+nx}$ हो तो $\{f(0)\}$ एवं $\{f(1)\}$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $\{.\}$ फलन के भिन्नात्मक भाग को प्रदर्शित करता है।

9. माना $h(x) = \text{Limit}_{x \rightarrow 0} \frac{x^n f(x) + g(x)}{x^n + 1}, x \in \mathbb{R}$. सिद्ध कीजिए कि $h(x) = \begin{cases} f(x), |x| > 1 \\ g(x), |x| < 1 \\ \frac{f(x) + f(x)}{2}, x = -1 \\ \text{परिभाषित नहीं, } x = -1 \end{cases}$

10. माना एक वृत्त C का केन्द्र O है तथा वृत्त के बाहर एक बिन्दु P स्थिति है। माना P से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा का स्पर्श बिन्दु T है तथा OP पर लम्ब TN खींचा जाता है (निम्नलिखित चित्र देखें)। यदि OP एवं वृत्त का प्रतिच्छेद बिन्दु A हो, तो सिद्ध कीजिए कि—

- (i) $\lim_{P \rightarrow A} PA = \lim_{P \rightarrow A} AN = 0$ (ii) $\lim_{P \rightarrow A} \frac{PA}{AN} = 1$



11. यदि $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+a^3)+8e^{\frac{1}{x}}}{1+(2+b+b^2)e^{\frac{1}{x}}} = 2$ हो, तो संभव क्रमित युग्म (a, b) ज्ञात कीजिए।
12. यदि $\Delta = \begin{vmatrix} \sin x & \sin(x+h) & \sin(x+2h) \\ \sin(x+2h) & \sin x & \sin(x+h) \\ \sin(x+h) & \sin(x+2h) & \sin x \end{vmatrix}$ हो, तो $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta}{h^2} \right) =$
13. (i) यदि $f(x) = \begin{cases} x+1 & , x < 1 \\ 2x-3 & , x \geq 1 \end{cases}$ हो, तो $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ का मान ज्ञात कीजिए।
 (ii) माना $f(x) = \begin{cases} x+\lambda & , x < 1 \\ 2x-3 & , x \geq 1 \end{cases}$ का मान ज्ञात कीजिए यदि $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ विद्यमान हो।
14. निम्नलिखित में से जिनका रूप अनिर्धार्य रूप हैं ? प्रकार भी बताइए—
 (i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x}$, जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।
 (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+1} - x$ (iii) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\tan 2x}$
 (iv) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\{x\}} \right)^{\frac{1}{\ln x}}$ जहाँ {.] फलन के भिन्नात्मक भाग को प्रदर्शित करता है।

**for 39 Yrs. Que. of IIT-JEE
 &
 15 Yrs. Que. of AIEEE
 we have distributed already a
 book**